$\bar{\lambda}_v$, а следовательно, и векторное произведение $\bar{\omega} \times \bar{\varphi}$ ортогонально $\bar{\lambda}_v$. Учитывая, что векторы $\bar{\omega}$ и $\bar{\varphi}$ также ортогональны векторному произведению $\bar{\omega} \times \bar{\varphi}$, приходим к выводу, что векторы $\bar{\omega}$, $\bar{\varphi}$ и $\bar{\lambda}_v$ являются компланарными и могут быть связаны между собой соотношением

$$\bar{\varphi} = k_1\bar{\omega} + k_2\bar{\lambda}_v, \tag{9}$$

где k_1, k_2 — подлежащие определению скалярные коэффициенты, которые в общем случае зависят от фазовых координат $\bar{\lambda}$ и $\bar{\omega}$.

Учитывая соотношение (9) и конечные условия (3), найдем постоянную C, входящую в скалярный первый интеграл (6): $C = -2\alpha_1$.

Подставляя выражение (9) в формулу для оптимального управления (4), получаем закон оптимального управления в виде функции фазовых координат

$$\bar{u}^{opt} = \frac{1}{2\alpha_3}(k_1\bar{\omega} + k_2\bar{\lambda}_v). \tag{10}$$

Коэффициенты k_1 и k_2 являются коэффициентами усиления нелинейной обратной связи. Они должны удовлетворять двум условиям: во-первых, закон управления (10) должен обеспечивать асимптотически устойчивый перевод твердого тела из заданного начального состояния (2) в ориентированное положение (3), во-вторых, соотношение (9) должно удовлетворять системе дифференциальных уравнений (5). Для определения этих коэффициентов можно воспользоваться прямым методом А.М. Ляпунова исследования устойчивости движения и теоремой Н.Н. Красовского об оптимальной стабилизации [2, 3].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №08-01-00310).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Бранец В.Н., Шмыглевский И.П.* Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973.

2. *Малкин И.Г.* Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966.

3. *Ройтенберг Я.Н.* Автоматическое управление. М.: Наука, 1978.

УДК 550.834

В.М. Гурьянов, О.А. Воронцова

ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ МОНОТИПНЫХ ВОЛН

Энергетический подход [1] к получению дифференциальных уравнений нелинейных упругих волн конечных деформаций приводит к системе уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} &\overline{q_t} - A(\overline{p})\overline{P_x} = 0, \\ &\overline{q_x} - \overline{P_t} = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

в которых независимые переменные: x – переменная Лагранжа, t – время $\overline{P} = \frac{\partial \overline{u}}{\partial x}$, $\overline{q} = \frac{\partial \overline{u}}{\partial t}$, $\overline{u} = (u_1, u_2, u_3) = \overline{u}(x,t)$ – вектор смещения точек нелинейно-упругой среды, $A(\overline{p}) = \frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial p_i \partial p_j}\right)$, $(i,j = 1,2,3)$ $W = W(P,h)$ – функция энергии динамического деформирования, $P = P_1$, $\qquad h = \frac{1}{2}\left(p_2{}^2 + p_3{}^2\right)$, ρ_0 – плотность среды в недеформированном состоянии.

Матрица $A(\overline{p})$ симметричная, имеет 3 собственных вектора $\bar{l} = \bar{l}(\overline{p}) = (l_1, l_2, l_3)$ и им соотвествующие 3 собственных значения $v_2(\overline{p})$, равные квадратам скоростей распространения волн $v_i{}^2(\overline{p})$, $(i = 1,2,3)$ квазипродольных (v_1), квазипоперечных (v_2) и поперечных (v_3). В общем случае все волны взаимодействуют между собой.

Для выделения волн одного типа без взаимодействия с другими типами выберем собственный вектор $\bar{l}(\overline{p})$ матрицы $A(\overline{p})$ так, чтобы он был суперпозицией функций $\bar{l}(\overline{p(b)})$. Введенная скалярная функция $b = b(x,t)$ такая, что выполняется условие существования волны выбранного типа

$$\frac{d\overline{P}}{db} = \bar{l}(\overline{p}). \tag{2}$$

Вектор $\overline{q}$ пусть удовлетворяет условию

$$\frac{d\overline{q}}{da} = \bar{l}(\overline{p}). \tag{3}$$

Пусть $\xi = \xi(x,t) = \text{const}$, $\eta = \eta(\text{x}, \text{t}) = \text{const}$ два семейства характеристик системы уравнений (1). Переходя к характеристическим независимым переменным ξ, η вместо исходных x, t, получим следующие дифференциальные уравнения:

$$x_\xi - vt_\chi = 0, \qquad x_\eta + vt_\eta = 0; \tag{4}$$

$$a_\xi - vb_\xi = 0, \qquad a_\xi + vb_\eta = 0. \tag{5}$$

Здесь и далее при переходе от переменных x, t к переменным ξ, η обозначения функции от этих переменных изменять не будем. Дифференциальные уравнения характеристик (4) описывают кинематику волн, а уравнения (5) — их динамику.

Ввведем новую функцию $\phi = \phi(b, \xi, \eta)$ следующим дифференциальным уравнением:

$$\frac{d\phi}{db} = v(\overline{p}(b)).$$

Через введенную функцию $\phi(b)$ динамические уравнения (5) можно записать так (7):

$$(a - \phi(b))_\xi = 0,$$
$$(a + \phi(b))_\eta = 0.$$

Проинтегрировав эти уравнения, получим их общие решения динамических уравнений (5) в инвариантах Римана $a+\phi(b),\ a-\phi(b)$:

$$\begin{aligned} a+\phi(b(\xi,\eta)) &= \alpha(\xi), \\ a-\phi(b(\xi,\eta)) &= \beta(\eta), \end{aligned} \tag{6}$$

не изменяющих своих значений на характеристиках ξ, η в соотвествии с правыми произвольными функциями $\alpha(\xi),\ \beta(\eta)$

Из (6) получаем (7):

$$\begin{aligned} &a(\xi,\eta) = \tfrac{\alpha(\xi)+\beta(\eta)}{2}, \\ &\phi(b(\xi,\eta)) = \tfrac{\alpha(\xi)-\beta(\eta)}{2}, \\ &b(\xi,\eta) = \phi^{-1}\Big(\tfrac{\alpha(\xi)-\beta(\eta)}{2}\Big). \end{aligned} \tag{7}$$

Здесь ϕ^{-1} понимается как обратная функция ϕ.

По найденным таким образом функциям $a(\xi,\eta),\ b(\xi,\eta)$ определяются по соотношениям (2), (3)

$$\overline{P} = \overline{P}(b(\xi,\eta)), \qquad \overline{q} = \overline{q}(a(\xi,\eta)).$$

Соотношения (7) представляют собой искомое общее решение динамических уравнений (5).

Кинематические уравнения (4) становятся линейными, поскольку известна функция $v(\overline{P}(b(\xi,\eta)))$. Их решение описано в [2].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Бленд Д.* Нелинейная динамическая теpоия упругости. М.: Мир. 1972. 184 с.

2. *Гурьянов В.В.* Монотипные плоские нелинейные сейсмические волны // Изв. АН СССР. Сер. Физика Земли. 1992. N7. С. 81-88.

УДК 539.3

Д.В. Иванов, О.А. Фомкина

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОСТОЯННЫХ ДЛЯ МОДЕЛЕЙ НЕО – ГУКА И МУНИ – РИВЛИНА ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ЭКСПЕРИМЕНТОВ НА ОДНООСНОЕ РАСТЯЖЕНИЕ

Статья посвящена исследованию механических характеристик артерий виллизиевого многоугольника [1] и позвоночных артерий человека и включает в себя испытания на одноосное растяжение образцов артерий, обработку данных и получение параметров моделей, используемых для описания поведения материала стенок артерий при численном моделировании кровеносной системы человека.