УДК 519.23

Е. Л. Александров, А. А. Никишин

О СПЕКТРАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЯХ КОВАРИАЦИОННЫХ ОПЕРАТОРОВ СЛУЧАЙНОГО ЭЛЕМЕНТА

Введение

Общая теория корреляции случайных функций разработана в ряде работ В. С. Пугачева (см., в частности, [1]).

Пусть $(\Omega;F;P)$ - вероятностное пространство, H - сепарабельное гильбертово пространство. Функция $\theta=\theta(\omega)$ из Ω в H называется случайным элементом H, если для любого $f\in H$ скалярное произведение (f,θ) есть случайная величина.

Всякий случайный элемент H порождает линейный, вообще говоря, неограниченный оператор Карлемана A. Будем предполагать, что этот оператор плотно задан. Теория операторов Карлемана хорошо развита в работах отечественных и зарубежных авторов. Необходимые сведения и понятия, которые мы используем, содержатся, например, в [2].

В настоящей статье по каждому случайному элементу H мы определяем пару ковариационных операторов. Изучаются их свойства и разложение случайного элемента по собственным функциям этих операторов, приводится пример.

1. Операторы Карлемана

Пусть H - сепарабельное гильбертово пространство, (X,μ) — измеримое с σ - конечное мерой пространство, $L^2(X,\mu)$ — гильбертово пространство функций, заданных на (X,μ).

Оператор A из H в $L^2(X,\mu)$ называется оператором Карлемана [2], если существует измеримая функция $k(x)$, заданная почти всюду на X, со значениями в H такая, что:

$$D(A)\subseteq D_k=\{f\in H:(f,k(\cdot))\in L^2(X,\mu)\},$$

$$Af=(f,k(\cdot)),\ f\in D(A).$$

Равенство $(Af)(x)=(f,k(x))$ понимается μ - почти всюду. Если $D(A)=D_k$, то оператор A называется максимальным оператором Карлемана.

Пусть оператор Карлемана A порождается функцией $k(x)$. На множестве

$$D(K)=\left\{\varphi(x)\in L^2(X,\mu):\int\limits_X \|k(x)\|_H\,\varphi(x)dx<+\infty\right\}$$

определим оператор K из $L^2(X,\mu)$ в H равенством

$$K\varphi=\int\limits_X k(x)\varphi(x)dx,\ \ \varphi\in D(K).$$

Оператор K называется полукарлемановским. Известно [2], $A=K^*$.

2. Ковариационные операторы

Пусть θ — случайный элемент гильбертова пространства H, A - оператор Карлемана, порождаемый элементом θ. $Ae=(e,\theta)$, $e\in D_\theta=D(A)$.

Будем предполагать, что область определения $D(A)=D_\theta$ оператора A плотна в H. В пространствах H и $L^2(\Omega)=L^2(\Omega;F;P)$ определим, соответственно, операторы $S=A^*A$ и $S_1=AA^*$, которые будем называть ковариационными операторами θ.

ТЕОРЕМА 1. Ковариационные операторы S и S_1 случайного элемента θ являются плотнозаданными самосопряженными неотрицательными операторами. Если область значений $R(A)$ плотна в $L^2(\Omega)$, а область значений $R(A^*)$ плотна в H, то операторы S и S_1 унитарно эквивалентны, то есть существует изометрический оператор V, отображающий H на $L^2(\Omega)$ такой, что

$$S=V^*S_1V,\ S_1=VSV^*.$$

3. Разложение случайного элемента

Будем предполагать, что ковариационные операторы S и S_1 имеют дискретный спектр $SpS=SpS_1\left\{\varphi_k^2\right\}_{k=1}^{+\infty}$ так, что имеет место разложение

$$Se=\sum_{k=1}^{+\infty}a_k^2(e,e_k)e_k,\ e\in D(S),\tag{1}$$

$$S_1\xi=\sum_{k=1}^{+\infty}a_k^2(\xi,\xi_k)\xi_k,\ \xi\in D(S_1),\tag{2}$$

где $\{e_k\}$ – ортонормированная система собственных функций оператора S, $\{\xi_k\}$ – ортонормированная система собственных функций оператора S_1.

ТЕОРЕМА 2. Если для случайного элемента пространства H имеют место разложения (1) и (2), то θ представим в виде

$$\theta(\omega)=\sum_{k=1}^{+\infty} a_k \xi_k(\omega) e_k\,, \tag{3}$$

сходимость ряда (3) понимается в пространстве H с вероятностью 1.

4. Пример

Пусть $\theta(t), t\in[0;T]$ — случайный элемент (телеграфный сигнал), принимающий значения +1 или 1. Число перемен знака $\theta(t)$ подчиняется закону Пуассона с параметром $\lambda=1$. Ковариационная функция $\theta(t)$ $e^{-|t-s|}$, $t,s\in[0;T]$ есть ядро ковариационного оператора S

$$(Sf)(x)=\int_0^T e^{-|t-s|} f(t)\,dt\,.$$

Собственные значения оператора S [3] есть $\lambda_k=\frac{2}{1+y_k^2}$, где y_k удовлетворяют уравнению $\operatorname{tg} y_k T=\frac{2y_k}{1-y_k^2}$. Очевидно, $\lambda_k\approx\frac{2}{1+k^2T^2}$. Соответствующие нормированные собственные функции есть $\varphi_k(t)=c_k\sin(t-T/2)y_k$, где $c_k=\left(T-\frac{\sin y_k T}{y_k}\right)$. Поэтому

$$\theta(\mathrm{t})=\sum_{\mathrm{k}=0}^{+\infty}\sqrt{\lambda_{\mathrm{k}}}\,\varphi_{\mathrm{k}}(\mathrm{t})\xi_{\mathrm{k}}(\omega),\ \mathrm{t}\in[0;\mathrm{T}]. \tag{4}$$

Пусть $0=t_0< t_1< t_2<\ldots< t_k<\ldots<T$ — независимые случайные точки на числовой оси, в момент которых $\theta(t)$ меняет знак. Положим $\tau_0=t_0, \tau_1=t_1-t_0, \tau_2=t_2-t_1$. Очевидно, случайные величины τ_0,τ_1,τ_2 независимы и имеют показательное распределение с параметром λ, а также

$$t_k=\tau_0+\tau_1+\ldots+\tau_k,\ k=1,2,\ldots$$

Из (4) находим

$$\xi_k=\frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}(\theta,\varphi_k)=\frac{c_k}{y_k\sqrt{\lambda_k}}\sum_{j=1}^{+\infty}(-1)^{j-1}\left[\cos\left(t_{j-1}(\omega)-\frac{T}{2}\right)y_k-\cos\left(t_j(\omega)-\frac{T}{2}\right)\right].$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Пугачев В. С.* Обобщенная теория корреляции случайных функций // Изв. АН СССР. Сер. Математика. 1953. Т. 17, № 5. С. 401 - 420.

2. *Weidmann J.* Carleman operators // Manuscripts. Math. 1970. № 2. P. 1 - 138.

3. *Пугачев В. С.* Теория случайных функций. М.: Физматгиз, 1962.