УДК 517.977

Н. Л. Андреева

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНО-ВЫПУКЛОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Рассмотрим задачу оптимального управления: найти траекторию $x(t) \in L_2^n[t_0, t_1]$ и управление $u(t) \in L_2[t_0, t_1]$ такие, которые связаны дифференциальными уравнениями

$$\frac{dx}{dt} = Ax + bu, \ \ t \in [t_0, t_1], \tag{1}$$

$$x(t_0) = x_0, \tag{2}$$

доставляют минимум интегральному функционалу

$$J(x, u) = \int_{t_0}^{t_1} F(x, u, t)\, dt \tag{3}$$

при ограничениях на управление типа неравенства

$$|u(t)| \le 1, \ \ t \in [t_0, t_1], \tag{4}$$

здесь A – матрица размерности $n \times n$; b, x_0 – векторы размерности n; $F(x, u, t)$ – равномерновыпуклая по (x, u) функция, имеющая производные $F_x^{'}, F_u^{'}$, удовлетворяющие условию Липшица и имеющие вторые производные $F_{uu}^{''}, F_{xt}^{''}, F_{ut}^{''}$.

Задачу (1) – (4) предлагается решать, используя идею штрафных функционалов [1].

$$\Phi_k(x, u) = \frac{1}{\varepsilon_k}\left\| x(t) - e^{A(t-t_0)}x_0 - \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\xi)} b\, u(\xi)\, d\xi \right\|^2_{L_2[t_0,\, t_1]} +$$

$$+ \frac{1}{\varepsilon_k}[\| (u(t) - 1)_+ \|^2_{L_2[t_0,\, t_1]} + \| -(u(t) - 1)_+ \|^2_{L_2[t_0,\, t_1]}], \tag{5}$$

где $\varepsilon_k \downarrow 0$ – малый параметр, e^{At} – матричная экспонента, функция $y_+ = \max(0, y)$.

Штрафные функционалы (5) позволяют задачу (1) – (4) заменить на последовательность задач на экстремум

$$J_k(x, u) = J(x, u) + \Phi_k(x, u) \to \inf . \tag{6}$$

ЛЕММА. Существует единственная точка минимума $(x_k(t), u_k(t)) \in L_2^{n+1}[t_0, t_1]$ функционала $J_k(x, u)$ из (6).

Доказательство получается на основе сильной выпуклости функционала $J(x, u)$ в пространстве $L_2^{n+1}[t_0, t_1]$ и выпуклости введённых функционалов штрафов (5).

ТЕОРЕМА 1. Функции $x_k(t), u_k(t)$ являются единственным решением интегральных уравнений

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\xi)} b\, u(\xi)\, d\xi - \frac{1}{2}\varepsilon_k F_x'(x, u, t), \tag{7}$$

$$F_u'(x, u, t) + \frac{2}{\varepsilon_k}[(u(t)-1)_+ - (-u(t)-1)_+] = -\int_{t}^{t_1} \left(e^{A(\xi - t)}b, F_x'(x, u, \xi)\right)_{R_n} d\xi\,. \tag{8}$$

Доказательство получается из необходимого и достаточного условия минимума сильно выпуклого функционала $\mathrm{grad} J_k(x, u) = 0$. Преобразуя эти уравнения и проводя асимптотику по малому параметру ε_k, получаем уравнения (7), (8) для $(x_k(t), u_k(t))$.

Традиционным путём можно доказать, что последовательность $\{x_k(t), u_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ точек минимума функционалов (6) со штрафами слабо сходится к решению $\left(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t)\right)$ задачи (1) – (4), которое существует в силу сильной выпуклости функционала $J(x, u)$ из (3), линейности дифференциальных связей (1), (2), выпуклости ограничений (4). Слабая сходимость $\{x_k(t), u_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ позволяет называть пару $(x_k(t), u_k(t))$ приближённым решением задачи (1) – (4). Использование уравнений (7), (8) с малым параметром ε_k позволяет доказать следующую теорему.

ТЕОРЕМА 2. Функции $x_k(t), u_k(t)$, удовлетворяющие уравнениям (7), (8), являются равномерно ограниченными и равностепенно непрерывными.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Андреева Н. Л.* Алгоритм решения линейно-квадратичной задачи оптимального управления // Математика и её приложения: Межвуз. сб. науч. тр. Саратов: Изд - во Сарат. ун - та, 1991. Вып. 2. С. 56 – 57.