УДК 517.51

Л. В. Борисова

К ВОПРОСУ О СХОДИМОСТИ РЯДОВ ФУРЬЕ-ЭРМИТА

Пусть $\{H_n(x)\}, n=1,2,3,...$ – последовательность многочленов Эрмита, ортонормированных на промежутке $(-\infty;+\infty)$ с весом e^{-x^2}. Для любой функции $f \in L[-\infty,+\infty;e^{-x^2}]$ через $S_n(f,x)=\sum_{k=1}^{n} a_k H_k(x)$, где $a_k=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x) H_k(x)dx$, обозначим n-ю частную сумму ряда Фурье-Эрмита функции f.

Цель статьи – найти необходимые и достаточные условия сходимости ряда Фурье-Эрмита суммируемой с весом функции в точке Лебега этой функции. Отметим, что вопрос о сходимости в точке Лебега сингулярных интегралов и рядов Фурье суммируемых функций исследовался в работах [1 - 4].

Аналогичный вопрос для рядов Фурье-Эрмита не решался.

Будем говорить, что функция $f \in L[-\infty,+\infty;e^{-x^2}]$ удовлетворяет условию S_0, если выполнены следующие два условия: при любом $a>0$ $\int_{-a}^{a}|f(x)|dx$ существует и справедливо равенство

$$\int_{n}^{\infty} e^{-x^2} x^{-\frac{5}{3}} \{|f(x)|+|f(-x)|\} dx = \bar{\bar{o}}(n^{-1}), n \to \infty. \qquad (1)$$

Тогда по аналогии с рядами Фурье-Лагерра имеет место

ЛЕММА 1 [5, с. 255]. Пусть $f(x)$ - измеримая в смысле Лебега функция на оси $(-\infty;+\infty)$ и удовлетворяет условию S_0. Тогда при произвольном вещественном x справедливо равенство

$$\lim_{n\to\infty}\left\{S_n(f,x)-\frac{1}{\pi}\int_{x-\sigma}^{x+\sigma} f(t)\frac{\sin\left[(2n)^{1/2}(x-t)\right]}{x-t}dt\right\}=0, \qquad (2)$$

где σ - фиксированное положительное число. Кроме того, равенство (2) выполняется равномерно на любом конечном отрезке $[a;b]\subset(-\infty;+\infty)$.

ЛЕММА 2 [4]. Пусть функция f суммируема на отрезке $[0;\sigma]$, где σ - фиксированное положительное число. Тогда справедливо равенство

$$\lim_{n\to\infty}\int_{E_n}\left[f(t)-f(t+\frac{\pi}{n})\right]\frac{n\sin nt}{nt+\pi}dt=$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{m_n}\frac{1}{2(k+1)}\int_0^1\left[f(\frac{\pi(t+2k)}{n})-f(\frac{\pi(t+2k+1)}{n})\right]\sin\pi t\,dt,$$

в котором

$$E_n=\bigcup_{k=0}^{m_n}\left[2k\frac{\pi}{n};(2k+1)\frac{\pi}{n}\right],\ m_n=\left[\frac{\sigma n}{2\pi}\right]-1. \tag{3}$$

ЛЕММА 3 [4]. Пусть функция f суммируема на отрезке $[x-\sigma;x+\sigma]$, где σ - фиксированное положительное число. Если x - точка Лебега функции f, то справедливо равенство

$$\lim_{n\to\infty}\int_{E_n} f(x\pm t)\frac{\sin nt}{t(nt+\pi)}dt=\frac{f(x)}{2},$$

в котором область интегрирования имеет вид (3).

ЛЕММА 4 [4]. Пусть функция f суммируема на отрезке $[x-\sigma;x+\sigma]$, где σ - фиксированное положительное число. Если существует значение $f(x+o)$ ($f(x-o)$), то справедливо равенство

$$\lim_{n\to\infty}\int_{E_n} f(x\pm t)\frac{\sin nt}{t(nt+\pi)}dt=\frac{f(x\pm o)}{2},$$

в котором область интегрирования имеет вид (4).

Сформулируем основной результат.

ТЕОРЕМА 1. Пусть функция $f\in L[-\infty,+\infty;e^{-x^2}]$ удовлетворяет условию S_0. Если $x\in(-\infty;+\infty)$ - точка Лебега функции f, то для того, чтобы ряд Фурье-Эрмита этой функции сходился в точке x, необходимо и достаточно выполнения равенства

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{m_n}\frac{1}{2(k+1)}\int_0^1\left[\varphi(x,\frac{t+2k}{\sqrt{2n}}\pi)-\varphi(x,\frac{t+2k+1}{\sqrt{2n}}\pi)\right]\sin\pi t\,dt=0, \tag{4}$$

где $m_n=\left[\sqrt{\frac{n}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\pi}\right]-1$ для фиксированного положительного σ и $\varphi(x,t)=f(x+t)+f(x-t)$.

При этом

$$\lim_{n\to\infty}S_n(f,x)=f(x).$$

Доказательство теоремы 1 опирается на леммы 1-3.

Следствие 1. Пусть функция f непрерывна на $(-\infty;+\infty)$ и удовлетворяет условию (1). Положим $h=\frac{\pi}{\sqrt{2n}}$, $m_n=\left[\sqrt{\frac{n}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\pi}\right]-1$, где σ - фиксированное положительное число.

Если выражение

$$T_n(f,x)=\sum_{k=0}^{m_n}\frac{f(x+2kh)-f(x+(2k+1)h)}{2k+1},$$

а также выражение $Q_n(f,x)$, получающееся из $T_n(f,x)$ заменой h на $-h$, стремится к нулю равномерно на $(-\infty;+\infty)$ при $n\to\infty$, то ряд Фурье-Эрмита сходится в каждой точке промежутка $(-\infty;+\infty)$, равномерно на любом отрезке $[a;b], -\infty<a<b<\infty$.

Последнее утверждение является аналогом признака равномерной сходимости тригонометрического ряда Фурье Р. Салема [6].

ТЕОРЕМА 2. Пусть функция $f\in L[-\infty,+\infty;e^{-x^2}]$ удовлетворяет условию S_0. Если в точке $x\in(-\infty;+\infty)$ существуют значения $f(x+o)$ и $f(x-o)$, то для того чтобы ряд Фурье-Эрмита функции f сходился в этой точке, необходимо и достаточно выполнения равенства (4).

При этом $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(f,x)=\dfrac{f(x+o)+f(x-o)}{2}$.

Доказательство теоремы 2 опирается на леммы 1, 2 и 4.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Romanovski M. P.* Quelques considerations sur la theorie des integrales singulieres // Math. Z. 1931. Bd. 34., H. 1. S. 35 - 49.

2. *Фадеев Д. К.* О представлении суммируемых функций сингулярными интегралами в точках Lebesque'a // Матем. сб. 1936. Т. 1(43), № 3. С. 351 - 367.

3. *Коровкин П. П.* Критерий сходимости ряда Фурье в точке Лебега функции. Прикладные вопросы математического анализа. Тула: Изд-во Тульск. гос. пед. ин-та, 1972. С. 69 - 72.

4. *Борисова Л. В.* Критерий сходимости рядов Фурье-Лагерра в точке Лебега. Саратов, 1988. 16 с. Деп. в ВИНИТИ 25.07.1988 г. № 5892-В88.

5. *Сеге Г.* Ортогональные многочлены. М.: Физматгиз, 1962.

6. *Salem R.* Essais sur les series trigonometriques // Actual. Sci. et Industr. Paris, 1940. N 862.

УДК 517.984

С. А. Бутерин

О ВОССТАНОВЛЕНИИ НЕСАМОСОПРЯЖЁННОГО ОПЕРАТОРА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ

Введение. Рассмотрим краевую задачу $L=L(q(x),h,H)$:

$$-y''+q(x)y=\lambda y,\quad 0<x<\pi,\quad q(x)\in L_2(0,\pi),\tag{1}$$

$$U(y):=y'(0)-hy(0)=0,\quad V(y):=y'(\pi)+Hy(\pi)=0.\tag{2}$$