$$\sum_{i=0}^{k} \alpha_{i,n} C_{-m_n+k-i,n} = \delta_{0,k}, \quad k = \overline{0, m_n - 1}, \tag{9}$$

где $\alpha_{k,n}$ и $C_{-k,n}$ определяются равенствами (3) и (6) соответственно.

Доказательство. Из (4) следует

$$\sum_{i=0}^{k} C_{-m_n+i,n} \Delta_{m_n+k-i,n} = -\psi_{k,n}(0), \quad k = \overline{0, m_n - 1}, \tag{10}$$

где $\Delta_{m_n+p,n}$, $p = 0,1,...$ – коэффициенты тейлоровского разложения функции $\Delta(\lambda)$ в окрестности точки λ_n. С другой стороны, из свойств собственных и присоединенных функций вытекает

$$\sum_{i=0}^{k} \psi_{i,n}(0) \varphi_{k-i,n}(x) = \psi_{k,n}(x), \quad k = \overline{0, m_n - 1}. \tag{11}$$

Кроме того, нетрудно показать, что

$$\Delta_{m_n+p,n} = -\int_0^{\pi} \psi_{p,n}(x) \varphi_{m_n-1,n}(x) dx, \quad p = \overline{0, m_n - 1}. \tag{12}$$

Из (10) – (12) следует (9). □

Возвратимся к доказательству теоремы единственности. Согласно (9), из $m_n = \tilde{m}_n$, $\alpha_{k,n} = \tilde{\alpha}_{k,n}$, $k = \overline{0, m_n - 1}$ вытекает $C_{-l,n} = \tilde{C}_{-l,n}$, $l = \overline{1, m_n}$. Отсюда, в силу (6) и $\lambda_n = \tilde{\lambda}_n$, $n = \overline{0, \infty}$, получаем, что $M(\lambda) = \tilde{M}(\lambda)$, и следовательно, согласно теореме 3, $L = \tilde{L}$. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Freiling G.* and *Yurko V. A.* Inverse spectral problems for second-order differential operators. Part 1 // Schriftenreiche des FB Mathematik der Universitaet-GN-Duisburg. 1999. Vol. 458. 118 s.

2. *Левитан Б. М., Саргсян И. С.* Операторы Штурма-Лиувилля и Дирака. М.: Наука, 1988.

3. *Марченко В. А.* Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения. Киев: Наук. думка, 1977.

УДК 519.853.3 + 517.518.82

И. Ю. Выгодчикова

О НАИЛУЧШЕМ ПРИБЛИЖЕНИИ НЕПРЕРЫВНОГО МНОГОЗНАЧНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИМ ПОЛИНОМОМ

1. Пусть $g_1(t)$ и $g_2(t)$ - непрерывные на отрезке $[0;1]$ функции, причём $g_1(t) \le g_2(t)$ при $t \in [0;1]$. Обозначим через $p_n(A,t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n$ полином n-ой степени с вектором коэффициентов $A = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$,

$\Phi(t)=[g_1(t),g_2(t)]$ – многозначное отображение (м.о.), сопоставляющее каждому значению $t\in[0;1]$ соответствующий отрезок.

Рассмотрим следующую задачу о наилучшем приближении м.о. $\Phi(t)$ полиномом n-ой степени:

$$\max_{t\in[0;1]}\max\{p_n(A,t)-g_1(t),g_2(t)-p_n(A,t)\}\longrightarrow \inf_{A\in R^{n+1}}. \tag{1}$$

Обозначим через $\rho=\inf\limits_{A\in R^{n+1}}\max\limits_{t\in[0;1]}\max\{p_n(A,t)-g_1(t),g_2(t)-p_n(A,t)$.

2. Рассуждениями, аналогичными [1, гл. 6, §8], сведём задачу (1) к задаче выпуклого программирования. Для этого обозначим

$$Y=(\xi,t)\in R^2,\quad G=\{(\xi,t)\in R^2/\xi\in\{-1,1\},t\in[0,1]\},$$

$$F(A,Y)=\frac{1}{2}\xi(1+\xi)[p_n(A,t)-g_1(t)]+\frac{1}{2}\xi(1-\xi)[p_n(A,t)-g_2(t)].$$

Тогда задача (1) эквивалентна задаче:

$$\varphi(A)\overset{df}{=}\max_{Y\in G}F(A,Y)\longrightarrow \inf_{A\in R^{n+1}}. \tag{2}$$

Функция $F(A,Y)$ непрерывна вместе с $\dfrac{\partial F(A,Y)}{\partial A}=\xi(1,t,\ldots,t^n)$ на $R^{n+1}\times G$.

Более того, она выпукла по A на R^{n+1} при каждом фиксированном $Y\in G$. Следовательно, (см., например, [2]), и функция $\varphi(A)$ является выпуклой на R^{n+1}, причём её субдифференциал выражается формулой

$$\partial\varphi(A)=co\left\{\frac{\partial F(A,Y)}{\partial A}\Big/ Y\in R(A)\right\}, \tag{3}$$
$$R(A)=\{Y\in G/F(A,Y)=\varphi(A)\}.$$

Тогда, в соответствии с известной теоремой выпуклого анализа [2], имеет место следующая

ТЕОРЕМА 1. Для того чтобы вектор A^* был решением задачи (2), а следовательно, и задачи (1), необходимо и достаточно, чтобы $0_{n+1}\in\partial\varphi(A^*)$, где $\partial\varphi(A)$ определяется формулой (3).

3. С помощью теоремы 1, а также леммы [1, с. 292, лемма 8.1] доказаны следующие факты.

ТЕОРЕМА 2. Решение задачи (1) существует. Для того чтобы вектор A^* был решением задачи (1), необходимо и достаточно чтобы:

а) либо нашлась хотя бы одна точка $t^*\in[0;1]$, в которой уклонение м.о. $\Phi(t)$ от полинома $p_n(A^*,t)$ было максимальным на $[0;1]$ и совпадало одновременно с уклонениями $p_n(A^*,t)$ от функций $g_1(t)$ и $g_2(t)$, то есть:

$$p_n(A^*,t^*)-g_1(t^*)=g_2(t^*)-p_n(A^*,t^*)=$$

$$= \max_{t\in[0,1]} \max\left\{p_n(A^*,t) - g_1(t), g_2(t) - p_n(A^*,t)\right\} \overset{df}{=} \rho(A^*);$$

б) либо нашлись точки $\{t_i\}, i = \overline{0, n+1}: 0 \le t_0 < t_1 < \ldots < t_{n+1} \le 1$, в которых уклонение м.о. $\Phi(t)$ от полинома $p_n(A^*,t)$ было максимальным на $[0;1]$, то есть $\rho(A^*) = \max\left\{p_n(A^*,t_i) - g_1(t_i), g_2(t_i) - p_n(A^*,t_i)\right\}$, $i = \overline{0, n+1}$; причём если $\rho(A^*) = p_n(A^*,t_i) - g_1(t_i)$ (соответственно, $\rho(A^*) = g_2(t_i) - p_n(A^*,t_i)$), то $\rho(A^*) = g_2(t_{i+1}) - p_n(A^*,t_{i+1})$ (соответственно, $\rho(A^*) = p_n(A^*,t_{i+1}) - - g_1(t_{i+1})$) для всех $i = \overline{0,n}$.

ТЕОРЕМА 3. Если выполняется неравенство

$$\rho > \frac{1}{2} \max_{t\in[0,1]} [g_2(t) - g_1(t)], \tag{4}$$

то решение задачи (1) единственно.

Нижеследующие простые примеры показывают, что решение задачи (1), в случае, если не выполняется условие (4), может быть неединственным, и даже в случае единственности решения, оно может не совпадать с решением задачи П. Л. Чебышева об отыскании полинома наилучшего приближения для функции $g(t) = \frac{1}{2}(g_1(t) + g_2(t))$.

Возьмём $g_1(t) \equiv 0$, $g_2(t) = 1 + t$, $t \in [0;1]$.

Рассмотрим случаи:

при $n = 0$ единственным решением задачи (1) является $p_0^1(t) \equiv 1$, в то время как $p_0^2(t) \equiv 3/4$ - единственное решение соответствующей задачи П. Л. Чебышева о наилучшем приближении функции $g(t) = \frac{1}{2}(1+t)$ полиномом 0-степени на отрезке $[0;1]$;

при $n = 1$, как следует из теоремы 2 (выполняется ситуация а)), решениями задачи (1) являются все полиномы $p_1(a,t) = a + (1-a)t$, $\forall a \in [0,1]$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Демьянов В. Ф., Малоземов В. Н.* Введение в минимакс. М.: Наука, 1972.

2. *Демьянов В. Ф., Васильев Л. В.* Недифференцируемая оптимизация. М.: Наука, 1981.