Пусть $\nabla_{\varepsilon_a} e_b = \Gamma^c_{ab} e_c$, $\nabla_{\varepsilon_{n+a}} e_b = C^c_{ab} e_c$, тогда

$$\Gamma^c_{ab} = \frac{1}{2} g^{cd} \left(\varepsilon_a g_{db} + \varepsilon_b g_{da} - \varepsilon_d g_{ab}\right), \; C^c_{ab} = \frac{1}{2} g^{cd} \left(g_{db \cdot a} + g_{da \cdot b} - g_{ab \cdot d}\right).$$

Теперь рассмотрим на X^{2m}_{n+m} связность без кручения для *допустимых* полей, согласованную уже с *римановой структурой* $\tilde{g}$:

$$\tilde{\nabla} \tilde{g} = 0, \qquad \tilde{\nabla}_{\varepsilon_A} \varepsilon_B = \Gamma^C_{AB} \varepsilon_C, \quad A, B, C = 1 \ldots m, (n+1) \ldots n+m.$$

Её коэффициентами будут

$$\tilde{\Gamma}^{c}_{ab} = \Gamma^c_{ab}, \quad \tilde{\Gamma}^{n+c}_{ab} = -\frac{1}{2} g^{cd} \left(g_{ab \cdot d} - g_{df} R^f_{ab} \right), \; \tilde{\Gamma}^{c}_{a,n+b} = \frac{1}{2} g^{cd} \left(g_{da \cdot b} + g_{bf} R^f_{da} \right),$$

$$\tilde{\Gamma}^{n+c}_{a,n+b} = \Gamma^c_{ab} + \frac{1}{2} g^{cd} \left(g_{df} B^f_{ab} - g_{bf} B^f_{ad} \right), \qquad \tilde{\Gamma}^{c}_{n+a,b} = \frac{1}{2} g^{cd} (g_{bd \cdot a} + g_{af} R^f_{bd}),$$

$$\tilde{\Gamma}^{n+c}_{n+a,b} = -\frac{1}{2} g^{cd} (g_{fa} B^f_{bd} + g_{af} B^f_{db}), \quad \tilde{\Gamma}^{n+c}_{n+a,n+b} = C^c_{ab}, \text{ где } B^c_{ab} = L^c_{ab} - \Gamma^c_{ab}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вагнер В. В.* Дифференциальная геометрия неголономных многообразий // VII Междунар. конкурс на соискание премии им. Н. И. Лобачевского. Казань, 1939. С. 195 – 262.

2. *Вагнер В. В.* Геометрия (n-1)-мерного неголономного многообразия в n-мерном пространстве // Тр. семинара по векторному и тензорному анализу. М.: ГТТИ, 1941. Вып.5. С. 173 – 225.

3. *Рунд Х.* Дифференциальная геометрия финслеровых пространств. М.: Наука, 1981.

УДК 517.984

О. Б. Горбунов

О СИСТЕМЕ ДИРАКА С НЕИНТЕГРИРУЕМОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ ВНУТРИ ИНТЕРВАЛА

Рассмотрим систему Дирака вида

$$BY' + (P(x) + P_0(x))Y = \lambda Y, \; -\infty < x < +\infty, \tag{1}$$

где

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \; P(x) = \begin{pmatrix} p_1(x) & p_2(x) \\ p_2(x) & -p_1(x) \end{pmatrix}, \; P_0(x) = \frac{\mu}{x} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь $p_k(x)$ – комплекснозначные функции, μ - комплексное число. Пусть для определенности $\operatorname{Re}\mu > 0, \mu + 1/2 \notin N$ и пусть $p_k(x) \in W_1^1(-\infty,\infty)$, $|x|^{-2\operatorname{Re}\mu}|\, p_k(x)| \in L(-1,1)$, $k = 1,2$.

Система Дирака без особенности изучена достаточно полно (см., например, [1]). Целью работы является построение специальных фундаментальных систем решений (ФСР) для системы (1) и изучение их аналитических и асимптотических свойств и свойств соответствующих множителей Стокса. Эти ФСР могут быть использованы при изучении прямых и обратных задач для системы Дирака с особенностью внутри. Для оператора Штурма-Лиувилля подобные результаты получены в [2].

Для краткости удобно из векторов ФСР составить фундаментальную матрицу (ФМ), договоримся, что если некоторый символ обозначает ФМ, то этот же символ с индексом $j = 1,2$ – ее вектор-столбцы.

1. Сначала рассмотрим следующую систему в комплексной x-плоскости:

$$BY' + P_0(x)Y = Y. \tag{2}$$

Система (2) имеет ФМ $C(x) = \left(C_1(x), C_2(x)\right)$, где $C_j(x) = x^{\mu_j}\hat{C}_j(x)$, $\mu_j = (-1)^j\mu$, $j = 1,2$, $\left(\hat{C}_1(x), \hat{C}_2(x)\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} x^{2k}\begin{pmatrix} xc_{1,2k+1} & c_{2,2k} \\ -c_{1,2k} & xc_{2,2k+1}\end{pmatrix}$, $c_{10}c_{20} = 1$,

$$c_{j,2k} = (-1)^k c_{j0}\left(2^k k!\prod_{s=0}^{k-1}(2\mu_j + 1 + 2s)\right)^{-1}, \qquad c_{j,2k+1} = c_{j,2k}\left(2\mu_j + 1 + 2k\right)^{-1},$$

причем $\det C(x) \equiv 1$, $\hat{C}_j(x)$ – целые по x.

Здесь и далее считаем, что $x^{\mu} = \exp\left(\mu\left(\ln|x| + i\arg x\right)\right)$, $\arg x \in \left(-\pi, \pi\,\right]$.

ТЕОРЕМА 1. 1. Существует ФМ $e(x) = \left(e_1(x), e_2(x)\right)$, где $e_j(x)$ могут быть найдены из системы интегральных уравнений:

$$e_j(x) = \left(I - \frac{1}{2}P_0(x)\right)^{-1}\left(e_j^0(x) + \frac{1}{2}e^0(x)\int_{C_x} e^{0,-1}(t)\left(P_0'(t) - BP_0^2(t)\right)e_j(t)\,dt\right),$$

где $C_x = \{t = x + \xi, \xi \geq 0\}$, $e^0(x) = \begin{pmatrix} ie^{ix} & -ie^{-ix} \\ e^{ix} & e^{-ix}\end{pmatrix}$ –ФМ системы $BY' = Y$, причем $\det e(x) \equiv 2i$ и $e_j(x) = e^{R_j x}\begin{pmatrix} R_j + O(x^{-1}) \\ 1 + O(x^{-1})\end{pmatrix}$ при $|x| \to \infty, |\arg x| \leq \pi - \delta$, где $R_1 = i, R_2 = -i$.

2. Пусть $C(x) = e(x)\beta^0$, тогда $\beta_{1j}^0 = (-1)^{j+1}\exp(-i\pi\mu_j)\beta_{2j}^0$, $j = 1,2$, $\beta_{21}^0\beta_{22}^0 = (4i\cos\pi\mu)^{-1}$.

Рассмотрим систему Дирака (1) с $P(x) \equiv 0$

$$BY' + P_0(x)Y = \lambda Y. \tag{3}$$

Обозначим $e(x,\lambda) := e(x\lambda)$ и $C_j(x,\lambda) := \lambda^{-\mu_j} C_j(x\lambda) = x^{\mu_j} \hat{C}_j(x\lambda)$, тогда, очевидно, что $e(x,\lambda)$, $C(x,\lambda) = (C_1(x,\lambda), C_2(x,\lambda))$ – ФМ системы (3), причем, $e_j(x,\lambda) = e^{R_j \lambda x} \begin{pmatrix} R_j + O((\lambda x)^{-1}) \\ 1 + O((\lambda x)^{-1}) \end{pmatrix}$ при $|\lambda x| \to \infty, |\arg(\lambda x)| \le \pi - \delta < \pi$, и $C(x,\lambda)$ – целая по λ.

Пусть $C(x,\lambda) = e(x,\lambda)\beta^0(\lambda)$, то $\beta^0_{kj}(\lambda) = \lambda^{-\mu_j}\beta^0_{kj}, . k, j = 1,2.$

2. Рассмотрим систему (1) как возмущение системы (3).

Построим ФМ $S(x,\lambda) = (S_1(x,\lambda), S_2(x,\lambda))$ системы (1) из решений систем интегральных уравнений

$$S_j(x,\lambda) = C_j(x,\lambda) + \int_0^x C(x,\lambda)C^{-1}(t,\lambda)BP(t)S_j(t,\lambda)dt, \;\; j = 1,2,$$

причем $\det S(x,\lambda) \equiv 1$, $S(x,\lambda)$ – целая по λ и $S(x,\lambda) = O(x^{\mu_j})$ при x и λ из компактов.

ТЕОРЕМА 2. При $x > 0$ система (1) имеет ФМ $E(x,\lambda) = (E_1(x,\lambda), E_2(x,\lambda))$ такую, что $E_j(x,\lambda)$ – регулярна в секторе $\arg\lambda \in (0, \pi - \varepsilon)$ при фиксированном $x \ne 0$ и достаточно большом $|\lambda|$, и при $|\lambda x| \ge 2|\mu|$ $E_j(x,\lambda) = e^{R_j \lambda x} \begin{pmatrix} R_j + O(|\lambda x|^{-\nu}) \\ 1 + O(|\lambda x|^{-\nu}) \end{pmatrix}$ $|\lambda| \to \infty$, равномерно по x из компакта, где $\nu = \begin{cases} 1, & \mathrm{Re}\mu \ge 1/2, \\ 2\,\mathrm{Re}\mu, & 0 < \mathrm{Re}\mu < 1/2. \end{cases}$ Функции $E_j(x,\lambda)$ удовлетворяют соответствующим системам интегральных уравнений

при $x \le a_\lambda \overset{df}{=} 2|\mu/\lambda|$

$$E_1(x,\lambda) = e_1(x,\lambda) + e(x,\lambda)\left(\int_0^\infty A(x,t,\lambda)E_1(t,\lambda)dt - \frac{1}{2} I_2 e^{-1}(a_\lambda,\lambda)Q(a_\lambda,\lambda)E_1(a_\lambda,\lambda) \right),$$

$$E_2(x,\lambda) = e_2(x,\lambda) + e(x,\lambda)\int_0^x G(t,\lambda)E_2(t,\lambda)dt,$$

при $x \ge a_\lambda$

$$E_1(x,\lambda) = e_1(x,\lambda) - \frac{1}{2}Q(x,\lambda)E_1(x,\lambda) + e(x,\lambda)\left(\int_0^\infty A(x,t,\lambda)E_1(t,\lambda)dt + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} I_1 e^{-1}(a_\lambda,\lambda)Q(a_\lambda,\lambda)E_1(a_\lambda,\lambda) \right),$$

$$E_2(x,\lambda)=e_2(x,\lambda)-\frac{1}{2}Q(x,\lambda)E_2(x,\lambda)+e(x,\lambda)\left(\int_0^x G(t,\lambda)E_2(t,\lambda)dt+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}e^{-1}(a_\lambda,\lambda)Q(a_\lambda,\lambda)E_2(a_\lambda,\lambda)\right),$$

где

$$A(x,t,\lambda)=\begin{cases} I_1G(t,\lambda), & t\le x,\\ -I_2G(t,\lambda), & t>x,\end{cases}\quad G(t,\lambda)=\begin{cases} e^{-1}(t,\lambda)BP(t), & t\le a_\lambda,\\ 1/2e^{-1}(t,\lambda)L(t,\lambda), & t>a_\lambda,\end{cases}\quad I_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},$$

$$I_2=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},\quad L(x,\lambda)=Q'(x,\lambda)+BP(x)+Q(x,\lambda)B(P(x)+P_0(x)-\lambda I),$$

$$Q(x,\lambda)=\left(P_0(x)-\lambda I\right)^{-1}P(x).$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть $S(x,\lambda)=E(x,\lambda)\beta(\lambda)$, тогда для множителей Стокса при $\arg\lambda\in(0,\pi-\varepsilon)$ имеет место асимптотика

$$\beta_{kj}(\lambda)=\lambda^{-\mu_j}\beta_{kj}^0\cdot(1+O(|\lambda|^{-\nu}))\text{ при }|\lambda|\to\infty,\ k,j=1,2.$$

ТЕОРЕМА 4. При $|\lambda x|\ge 1$

$$S_j(x,\lambda)=\beta_j^0\lambda^{-\mu_j}e^{2i\pi\mu_j m}\left(e^{-i\lambda x}\begin{bmatrix}-i\\1\end{bmatrix}_0-(-1)^j e^{i\pi\mu_j l}e^{i\lambda x}\begin{bmatrix}i\\1\end{bmatrix}_0\right),j=1,2,$$

где $\left[\left(a_j\right)_{j=1,2}\right]_0=\left(a_j+O(|\lambda x|^{-\nu})\right)_{j=1,2}$, $|\lambda|\to\infty$ равномерно по x из компакта, $\beta_1^0\beta_2^0=\dfrac{1}{4i\cos\pi\mu}$, $l=\begin{cases}-1, \arg(x\lambda)\in\Pi_0,\\ 1, \arg(x\lambda)\in\Pi_{-1}\cup\Pi_1,\end{cases}$ $m=\begin{cases}1, \arg\lambda\in\Pi_1, x<0,\\ -1, \arg\lambda\in\Pi_{-1}, x>0,\\ 0, \text{ост. сл.},\end{cases}$

$\Pi_k=\{z:\arg z\in\left(\pi(5k-3)/(6-2k),\pi(5k+3)/(6+2k)\right]\}$, $k=0,\pm1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Левитан Б. М., Саргсян И. С.* Операторы Штурма-Лиувилля и Дирака. М.: Наука, 1988.

2. *Юрко В. А.* О восстановлении дифференциальных операторов Штурма-Лиувилля с особенностями внутри интервала // Матем. заметки. 1998. Т. 64 № 1. С. 143 - 156.