УДК 517.54

Е. В. Григорьева

ОЦЕНКА ЛИНЕЙНОГО ФУНКЦИОНАЛА ДЛЯ ОДНОЛИСТНЫХ ФУНКЦИЙ, БЛИЗКИХ К ТОЖДЕСТВЕННОЙ*

Пусть $S(M)$, $M>1$ – класс голоморфных однолистных в единичном круге D функций

$$f(z)=z+a_2z^2+\ldots\ , \quad |z|<1, \tag{1}$$

таких, что $|f(z)|<M$. Функция Пика $P_M(z)\in S(M)$ отображает D на круг радиуса M с разрезом вдоль отрезка на отрицательном направлении вещественной полуоси.

Пользуясь разложением (1), рассмотрим двупараметрическое семейство линейных непрерывных функционалов пятого порядка

$$L(\alpha,\beta;f)=a_5+\alpha a_4+\beta a_3+3\alpha a_2,\ (\alpha,\beta)\in R^2$$

в классе $S(M)$. В настоящей статье найдено все множество значений (α,β), для которых $\max\limits_{f\in S(M)} \operatorname{Re} L(\alpha,\beta;f)=\operatorname{Re} L(\alpha,\beta;P_M)$ при M, близких к 1.

Решение этой конкретной экстремальной задачи основано на общей теореме автора [1], которая применительно к функционалу $L(\alpha,\beta;f)$ может быть сформулирована в следующем виде.

ТЕОРЕМА А [1]. Пусть тригонометрический многочлен

$$Q(u)=-2[\cos 4u+\alpha\cos 3u+\beta\cos 2u+3\alpha\cos u],\ Q''(\pi)<0,$$

достигает максимума на $[0,2\pi]$ только в точке $u=\pi$. Тогда существует $M=M(\alpha,\beta)>1$ такое, что для всех $M\in(1,M(\alpha,\beta))$ максимум $\operatorname{Re} L(\alpha,\beta;f)$ в классе $S(M)$ достигается только функцией Пика $P_M(z)$.

Как видно из теоремы А, решение поставленной задачи сводится к исследованию критических точек алгебраического многочлена четвертой степени. Этим обстоятельством продиктован выбор функционала $L(\alpha,\beta;f)$, точнее, специальный выбор коэффициента 3α при a_2, который позволяет провести полное исследование многочлена. Заметим, что соответствующая экстремальная задача для двупараметрического семейства функционалов четвертого порядка $N(\alpha,\beta;f)=a_4+\alpha a_3+\beta a_2$ решена Д. В. Прохоровым и Ж. Е. Васильевой [2].

Введем следующие обозначения. Положим

---

* Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 98-01-00842.

$$E_1 = \{(\alpha,\beta) : \beta > 4, \beta < 2\alpha, \beta < 3\alpha - 4\},$$
$$E_2' = \{(\alpha,\beta) : \alpha > 0, \beta < -3\alpha - 4\},$$
$$E_2'' = \{(\alpha,\beta) : \alpha > 0, \beta < 4, |\beta + 4| < 3\alpha\},$$
область E_2''' состоит из точек $(\alpha,\beta) \in E_2''$, удовлетворяющих неравенству
$$\alpha(9\alpha^2 - 32\beta + 128)^{\frac{3}{2}} > 27\alpha^4 - 144\alpha^2\beta + 576\alpha^2 + 128\beta^2 - \\ - 4096\alpha + 1024\beta + 2048, \qquad (2)$$
$E_2 = E_2' \cup E_2'''$, $E = E_1 \cup E_2$.

ТЕОРЕМА 1. Для всякой точки $(\alpha,\beta) \in E$ существует $M(\alpha,\beta) > 1$ такое, что для всех $M \in (1, M(\alpha,\beta))$ функция $P_M(z)$ доставляет максимум $\operatorname{Re} L(\alpha,\beta; f)$ в классе $S(M)$.

Доказательство. Согласно теореме A достаточно установить, что при $(\alpha,\beta) \in E$ тригонометрический многочлен $Q(u)$ достигает максимума на $[0,2\pi]$ только в точке $u = \pi$. После замены $y = \cos u$ тригонометрический многочлен $Q(u)$ сводится к алгебраическому многочлену четвертой степени
$$P(y) = Q(\arccos y) = -16y^4 - 8\alpha y^3 - (4\beta - 16)y^2 - 2 + 2\beta .$$
Осталось показать, что $P(y)$ достигает максимума на $[-1;1]$ только в точке $y = -1$.

Доказательство разбивается на два случая.

1. Пусть $\beta > 4$. В этом случае $P(y)$ имеет в точке $y = 0$ локальный максимум, а производная $P'(y)$ обращается в нуль в точках y_1, y_2, $y_3 = 0$, $y_1 < y_2 < y_3$. Многочлен $P(y)$ достигает максимума на $[-1;1]$ лишь в точке $y = -1$ при выполнении условий: $y_1 < -1$, $y_2 > -1$ и $P(-1) > P(0)$.

Совокупность первых двух из этих условий эквивалентна неравенству $\beta < 3\alpha - 4$, в то время, как третье условие приводит к неравенству $\beta < 2\alpha$. Таким образом, первый случай доказывает теорему 1 для $(\alpha,\beta) \in E_1$.

2. Пусть $\beta < 4$. В этом случае $P(y)$ имеет в точке $y = 0$ локальный минимум, а производная $P'(y)$ обращается в нуль в точках $y_1 < 0$, $y_2 = 0$, $y_3 > 0$. Многочлен $P(y)$ достигает максимума на $[-1;1]$ лишь в точке $y = -1$ в одном из двух вариантов.

a) $y_1 < -1$, $y_3 > 1$ и $P(-1) > P(1)$.

Третье условие приводит к неравенству $\alpha > 0$, а совокупность первых двух условий эквивалентна неравенству $\beta < -3\alpha - 4$. Таким образом, вариант *a*) доказывает теорему 1 для $(\alpha,\beta) \in E_2'$.

b) $y_1 < -1$, $y_2 < 1$ и $P(-1) > P(y_2)$.

Совокупность первых двух из этих условий определяет множество E_2'', в то время, как третье условие приводит к неравенству (2). Таким образом, вариант (b) доказывает теорему 1 для $(\alpha,\beta) \in E_2'''$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Григорьева Е. В.* Линейные функционалы в классе ограниченных однолистных функций // Тр. Петрозаводск. гос. ун-та. Сер. Математика. 2000. Вып.7.
2. *Prokhorov D., Vasileva Z.* Linear extremal problems for univalent function close to identity // Bull. Soc. Sci. Lettr. Lodz. 1995. Vol. 45. P. 11 - 47.

УДК 517.546

Л. Л. Громова

ОБ ИНТЕГРАЛЬНЫХ СРЕДНИХ ДЛЯ МЕРОМОРФНЫХ ЗВЕЗДООБРАЗНЫХ ФУНКЦИЙ*

Обозначим через $\sum^*$ класс мероморфных функций $W = F(\zeta)$, регулярных и однолистных в области

$$D = \{\zeta : |\zeta| > 1\},$$

за исключением простого полюса при $\zeta = \infty$, отображающих D на область, дополнение которой звездообразно относительно точки $w = 0$.

Известно (см., например, [1]) интегральное представление для $F(\zeta) \in \sum^*$:

$$F(\zeta) = \zeta \exp\left\{2 \int_{-\pi}^{\pi} \log\left(1 - e^{it}\zeta^{-1}\right) d\mu(t)\right\}, \tag{1}$$

$|\zeta| > 1, \mu(t)$ – неубывающая функция в промежутке $[-\pi;\pi]$ и $\int_{-\pi}^{\pi} d\mu(t) = 1$.

Полагая $\mu(t)$ ступенчатой, имеющей скачки в точках t_k, $-\pi \le t_1 < t_2 < \cdots < t_n \le \pi$, получаем из (1) функции вида

$$F_n(\zeta) = \zeta \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \zeta^{-1} e^{it_k}\right)^{2\gamma_k}, \sum_{k=1}^{n} \gamma_k = 1, \tag{2}$$

образующие подкласс $\sum_n^* \subset \sum^*$, всюду плотный в $\sum^*$.

ТЕОРЕМА. Для $F(\zeta) \in \sum_n^*$ справедливо неравенство

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 98-01-00842.