Совокупность первых двух из этих условий определяет множество E_2'', в то время, как третье условие приводит к неравенству (2). Таким образом, вариант (b) доказывает теорему 1 для $(\alpha,\beta) \in E_2'''$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Григорьева Е. В.* Линейные функционалы в классе ограниченных однолистных функций // Тр. Петрозаводск. гос. ун-та. Сер. Математика. 2000. Вып.7.

2. *Prokhorov D., Vasileva Z.* Linear extremal problems for univalent function close to identity // Bull. Soc. Sci. Lettr. Lodz. 1995. Vol. 45. P. 11 - 47.

УДК 517.546

Л. Л. Громова

ОБ ИНТЕГРАЛЬНЫХ СРЕДНИХ ДЛЯ МЕРОМОРФНЫХ ЗВЕЗДООБРАЗНЫХ ФУНКЦИЙ*

Обозначим через $\sum^*$ класс мероморфных функций $W = F(\zeta)$, регулярных и однолистных в области

$$D = \{\zeta : |\zeta| > 1\},$$

за исключением простого полюса при $\zeta = \infty$, отображающих D на область, дополнение которой звездообразно относительно точки $w = 0$.

Известно (см., например, [1]) интегральное представление для $F(\zeta) \in \sum^*$:

$$F(\zeta) = \zeta \exp\left\{2\int_{-\pi}^{\pi} \log\left(1 - e^{it}\zeta^{-1}\right) d\mu(t)\right\}, \qquad (1)$$

$|\zeta| > 1, \mu(t)$ – неубывающая функция в промежутке $[-\pi;\pi]$ и $\int_{-\pi}^{\pi} d\mu(t) = 1$.

Полагая $\mu(t)$ ступенчатой, имеющей скачки в точках t_k, $-\pi \le t_1 < t_2 < \cdots < t_n \le \pi$, получаем из (1) функции вида

$$F_n(\zeta) = \zeta \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \zeta^{-1} e^{it_k}\right)^{2\gamma_k}, \sum_{k=1}^{n} \gamma_k = 1, \qquad (2)$$

образующие подкласс $\sum_n^* \subset \sum^*$, всюду плотный в $\sum^*$.

ТЕОРЕМА. Для $F(\zeta) \in \sum_n^*$ справедливо неравенство

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 98-01-00842.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left|F'(\zeta)\right|^p d\theta \le \int_{-\pi}^{\pi} |F_0'(\zeta)|^p d\theta \tag{3}$$

при вещественном $p \ge 1$ и $\zeta = \rho e^{i\theta}$, $\rho > 1$, где

$$F_0(\zeta) = \zeta\left(1 - \frac{e^{i\alpha}}{\zeta}\right)^{\lambda_1}\left(1 - \frac{e^{i\beta}}{\zeta}\right)^{\lambda_2}, \tag{4}$$

$\lambda_1, \lambda_2 \ge 0, \lambda_1 + \lambda_2 = 2, \alpha, \beta$ – произвольные вещественные числа.

Доказательство. Предполагаем противное, что для экстремальной функции $F_0^n(\zeta)$ имеется более двух скачков. Положим, не уменьшая общности, что, например, $\gamma_1 > 0, \gamma_2 > 0, \gamma_3 > 0$, и покажем, что это приводит к противоречию.

Используем вариацию Х. Поммеренке [2]. Для этого введём вещественные числа $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 0, \beta_4 = \cdots = \beta_n = 0$ и числа $\gamma_k^* = \gamma_k + \delta\beta_k \ge 0$ для достаточно малых δ такие, что $\sum\limits_{k=1}^{n} \gamma_k = 1$. Обозначим через $F_n^*(\zeta)$ функцию, у которой в формуле (2) вместо γ_k записаны $\gamma_k^*, k = \overline{1,n}$. Для удобства в дальнейшем положим $F_n^*(\zeta) = F_*(\zeta)$. Тогда

$$M_{F_*}(\rho) = \int_{-\pi}^{\pi} |F_*'(\zeta)|^p d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \left(|F_*'(\zeta)|^2\right)^{p/2} d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\left|\frac{\zeta F_*'(\zeta)}{F_*(\zeta)}\right|^2 \left|\zeta^{-1} F_*(\zeta)\right|^2\right)^{p/2} d\theta.$$

Пусть $\zeta^{-1} = z$, $e^{it_k} = z_k$. Имеем

$$M_{F_*}(\rho) = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\left|\sum_{k=1}^{n} (\gamma_k + \delta\beta_k) \frac{1 + z_k z}{1 - z_k z}\right|^2 \prod_{k=1}^{n} |1 - z_k z|^{4(\gamma_k + \delta\beta_k)}\right)^{p/2} d\theta =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \left(|c + \delta b|^2 \prod_{k=1}^{n} |1 - z_k z|^{4(\gamma_k + \delta\beta_k)}\right)^{p/2} d\theta,$$

где $c = \sum\limits_{k=1}^{n} \gamma_k \dfrac{1 + z_k z}{1 - z_k z}$, $b = \sum\limits_{k=1}^{3} \beta_k \dfrac{1 + z_k z}{1 - z_k z}$.

Введём вещественное l следующим равенством:

$$l = \sum_{k=1}^{3} \beta_k \log|1 - z_k z|.$$

В новых обозначениях имеем

$$M_{F_*}(\rho) =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\left(|c|^2 + 2\delta \operatorname{Re}(\bar{c}b) + \delta^2 |b|^2 \right) \left| zF_* \left(\frac{1}{z} \right) \right|^2 \exp\left(4 \sum_{k=1}^{3} \beta_k \delta \log|1 - z_k z| \right) \right)^{p/2} d\theta =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\left(|c|^2 + 2\delta \operatorname{Re}(\bar{c}b) + \delta^2 |b|^2 \right) \left| zF_* \left(\frac{1}{z} \right) \right|^2 \left(1 + 4\delta l + 8\delta^2 l^2 + O(\delta^3) \right) \right)^{p/2} d\theta =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \left| zF_n^0 \left(\frac{1}{z} \right) \right|^p \left(|c|^p + \delta(p|c|^{p-2} \operatorname{Re}(\bar{c}b) + 2pl|c|^p) + \delta^2 (p/2 |c|^{p-2} |b|^2 + \right.$$

$$+ p(p/2 - 1)|c|^{p-4} [\operatorname{Re}(\bar{c}b)]^2 + 2p^2 |c|^{p-2} l \operatorname{Re}(\bar{c}b) + |c|^p 4pl^2 +$$

$$\left. + 2p(p-2)l^2 |c|^p) + O(\delta^3) \right) d\theta.$$

В силу экстремальности функции $F_n^0(\zeta)$ имеем неравенство

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left| zF_n^0 \left(\frac{1}{z} \right) \right|^p \left(\frac{|c|^{p-2}}{2} |b|^2 + \frac{p-2}{2} |c|^{p-4} [\operatorname{Re}(\bar{c}b)]^2 + \right.$$

$$\left. + 2p|c|^{p-2} l \operatorname{Re}(\bar{c}b) + 2pl^2 |c|^p \right) d\theta \leq 0. \qquad (5)$$

Выбираем теперь $\beta_k, k = 1,2,3$, так, чтобы

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left| zF_n^0 \left(\frac{1}{z} \right) \right|^p |c|^{p-2} l \operatorname{Re}(\bar{c}b) d\theta = 0.$$

Легко доказать, что в формуле (5) второй сомножитель $P(\theta) \geq 0$ при $p \geq 1$. Отсюда следует, что для непрерывных функций $P(\theta) = 0$ или $b = 0$. Последнее равенство означает, что три различных точки $w_k = \dfrac{1 + z_k z}{1 - z_k z}$, k=1, 2, 3, лежат на одной прямой, чего не может быть, и экстремальная функция $F_0(\zeta)$ имеет вид (4).

Следствие. Из неравенства (3) следует оценка сверху для $|F'(\zeta)|$, $F(\zeta) \in \sum^*$, полученная ранее Р. Бутельером [3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Голузин Г.М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. 2-е изд. М.: Наука, 1966.

2. *Pommerenke Ch.* On meromorphic starlike function // Pacific Journal of Mathematics. 1963. Vol. 13, № 1. P. 221 - 235.

3. *Boutellier R.* Le théorème de déformation de la classe $\sum^*$ // C.R.Acad. Sci. Paris, 1978. T. 286. P. 33 - 35.