УДК 517.518.837

Е. В. Гудошникова

МНОГОМЕРНЫЕ АНАЛОГИ ОПЕРАТОРОВ САСА-МИРАКЬЯНА И БАСКАКОВА

В теории линейных положительных операторов хорошо известны и часто используются последовательности операторов Саса-Миракьяна [1,2]:

$$M_n(f,x)=\sum_{k=0}^{\infty} f\left(\tfrac{k}{n}\right)\frac{(nx)^k}{k!}e^{-nx},$$

и Баскакова [3]:

$$B_n(f,x)=\sum_{k=0}^{\infty} f\left(\tfrac{k}{n}\right)\binom{n+k-1}{k}\left(\frac{x}{1+x}\right)^k(1+x)^{-n}.$$

Обе эти последовательности приближают непрерывную функцию на $[0,\infty)$.

J. Grof [4] построил аналог операторов M_n:

$$H_n(f,x)=\sum_{k=0}^{\infty}\left\{f\left(\tfrac{k}{n}\right)+(-1)^k f\left(-\tfrac{k}{n}\right)\right\}\frac{(nx)^k}{2ch(nx)k!}.$$

Операторы H_n уже не являются положительными, но приближают непрерывную функцию на всей действительной оси.

Ниже будут указаны аналоги операторов M_n и B_n для функции многих переменных, приближающие функцию во всем пространстве R_r.

Введем обозначения:

для $m\in N_0$ запишем представление в двоичном формате

$m=m_1+m_2\cdot 2+m_3\cdot 2^2+\ldots+m_r\cdot 2^{r-1}$, где $m_k\in\{0;1\}$;

$\overline{x}=(x_1,\ldots,x_r)$;

$\overline{k}_{n,m}=\left(\frac{k_1}{n}(-1)^{m_1},\frac{k_2}{n}(-1)^{m_2},\ldots,\frac{k_r}{n}(-1)^{m_r}\right)$, где $k_j\in N_0$, $n\in N$;

$\left(\overline{mk}\right)=m_1k_1+\ldots..+m_rk_r$.

Для функции $f:R_r\to R$ введем аналог модуля непрерывности как

$$\omega\ (f,\overline{h})=\sup_{\overline{\delta}\in Q(\overline{h})}\ \sup_{\overline{x}\in R_r}\left|f(\overline{x}+\overline{\delta})-f(\overline{x})\right|,$$

где $Q(\overline{h})=[0,h_1]\times[0,h_2]\times\cdots\times[0,h_r]$.

Рассмотрим операторы:

$$L_n(f;\bar{x})=\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}....\sum_{k_r=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{2^r-1}(-1)^{(\overline{mk})}f(\bar{k}_{n,m})\cdot p_{n,k_1,k_2,....,k_r}(\bar{x}),$$

где $p_{n,k_1,k_2,....,k_r}(\bar{x})=\prod_{i=1}^{r}\frac{(nx_i)^{k_i}}{2ch(nx_i)k_i!}$,

и операторы

$$S_n(f;\bar{x})=\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}....\sum_{k_r=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{2^r-1}(-1)^{(\overline{mk})}f(\bar{k}_{n,m})\cdot q_{n,k_1,k_2,....,k_r}(\bar{x}),$$

где $\quad q_{n,k_1,k_2,....,k_r}(\bar{x})=\prod_{i=1}^{r}w_{n,k_i}(x_i)\cdot\varphi_n(x_i),\qquad w_{n,k}(x)=\binom{n+k-1}{k}\left(\frac{x}{1+|x|}\right)^k,$

$$\varphi_n(x)=\frac{(1+2|x|)^n}{\{(1+|x|+x)^n+(1+|x|-x)^n\}(1+|x|)^n}.$$

ТЕОРЕМА 1. Для равномерно непрерывной функции $f:R_r\to R$

$$\left|L_n(f;\bar{x})-f(\overline{x})\right|\le\omega(f;\bar{h}_n)(1+r)(1+2^r),$$

где $\bar{h}_n=\left(\sqrt{\frac{|x_1|}{n}},....,\sqrt{\frac{|x_r|}{n}}\right)$.

Доказательство. Обозначим

$$f_i(\bar{x})=f(x_1,...,x_{i-1},-x_i,x_{i+1},...,x_r)=f(\bar{x}(i)).$$

Поскольку $L_n(f;\bar{x})=L_n(f_i,\bar{x}(i))$, доказательство утверждения теоремы сводится к случаю, когда все координаты $\bar{x}$ положительны. Для таких $\bar{x}$ обозначим

$$g(\bar{x})=\frac{1}{h_1..h_r}\int_0^{h_1}...\int_0^{h_r}f(\bar{x}+\bar{t})\,dt_1....dt_r,\ \bar{x}_m=\left(x_1(-1)^{m_1},....,x_r(-1)^{m_r}\right),$$

где m и m_k – то же, что и выше. Тогда

$$\left|L_n(f;\bar{x})-f(\overline{x})\right|\le\left|L_n(f;\bar{x})-L_n(g;\bar{x})\right|+$$

$$+\sum_{k_1=0}^{\infty}....\sum_{k_r=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{2^{r-1}}\left|g(\bar{k}_{n,m})-g(\bar{x}_m)\right|p_{n,k_1,.....,k_r}(\bar{x})+\tag{1}$$

$$+\sum_{m=1}^{2^r-1}\left|g(\bar{x}_m)-g(\bar{x})\right|\prod_{i=1}^{r}\frac{\exp(nx_i(-1)^{m_i})}{2ch(nx_i)}+\left|g(\bar{x})-f(\bar{x})\right|.$$

Во-первых, очевидно, что

$$\left|g(\bar{x})-f(\bar{x})\right|\le\omega(f;\bar{h}_n)\quad\text{и}\quad\left|L_n(f;\bar{x})-L_n(g;\bar{x})\right|\le\omega(f;\bar{h}_n).$$

Во-вторых, применяя формулу конечных приращений, получаем оценку

$$\left|g(\bar{t})-g(\bar{x})\right|\le\left|\sum_{i=1}^{r}\frac{\partial}{\partial x_i}g(\bar{\xi})(t_i-x_i)\right|\le\omega\,(f;\bar{h}_n)\sum_{i=1}^{r}\frac{|t_i-x_i|}{h_i}.$$

В третьих, имеет место соотношение

$$\sum_{m=1}^{2^r-1}\left[\sum_{i=1}^{r}\left\{\frac{x_i}{h_i}(1-(-1)^{m_i})\right\}\cdot\prod_{i=1}^{r}\frac{\exp(nx_i(-1)^{m_i})}{2ch(nx_i)}\right]=\sum_{i=1}^{r}\frac{x_i\exp(-nx_i)}{h_i ch(nx_i)},$$

доказываемое по индукции. Поэтому, продолжая неравенство (1) и применяя неравенство Коши-Буняковского, получим

$$\left|L_n(f;\bar{x})-f(\bar{x})\right|\le$$

$$\le\omega\,(f,\bar{h}_n)\left\{1+2^r+2^r\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{h_i}\sqrt{M_n((t-x_i)^2;x)}+\sum_{i=1}^{r}\frac{x_i\exp(-nx_i)}{h_i ch(nx_i)}\right\}\le$$

$$\le\omega\,(f;\bar{h}_n)(1+r)(1+2^r),$$

что и требовалось доказать.

ТЕОРЕМА 2. Для равномерно непрерывной функции $f: R_r\to R$

$$\left|S_n(f;\bar{x})-f(\bar{x})\right|\le\omega\,(f;\bar{h}_n)(1+r)(1+2^r),$$

где $\bar{h}_n=\left(\sqrt{\frac{|x_1|}{n}},\dots,\sqrt{\frac{|x_r|}{n}}\right)$.

Доказательство теоремы 2 во многом аналогично доказательству теоремы 1, хотя специфика функций, образующих ядро оператора Баскакова, вносит ряд трудностей технического характера.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Миракьян Г. М.* Аппроксимирование непрерывных функций с помощью полиномов $e^{-nx}\sum_{k=0}^{n}c_{k,n}x^k$ // Докл. АН СССР. 1941. Т. 31. С. 201 - 205.

2. *Szasz O.* Generalization of S. Bernstein's polinomials to the infinite interval // J.Res.Nat.Bur.Standards, Sect.B. 1950. Vol. 45. P. 239 - 245.

3. *Баскаков В. А.* Об одной последовательности линейных положительных полиномиальных операторов // Уч. зап. КГПИ. Калинин, 1969. Т. 59. С. 79 - 99.

4. *Grof J.* Függvényapproximácó az egész számeqyensen, súlyozott hatványsorokkal // Mat. Lapok. 1977 - 1981. Vol. 29. № 1 - 3. С. 161 - 170.