УДК 513.88

А. П. Гуревич, А. П. Хромов

СУММИРУЕМОСТЬ ПО РИССУ СПЕКТРАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ ОПЕРАТОРА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ В ПРОСТРАНСТВЕ $C^1[0,1]$*

Пусть L - оператор, порожденный дифференциальным выражением $l(y) = y''(x) + p(x)y(x)$, $x \in [0,1]$, $p(x) \in L[0,1]$, и регулярными по Биркгофу [1, с. 66, 67] краевыми условиями:

$$u_k(y) = a_{1k}y'(0) + a_{2k}y(0) + b_{1k}y'(1) + b_{2k}y(1) = 0, \quad k = 1,2. \tag{1}$$

Обозначим через R_λ резольвенту оператора L. Для случая $p(x) \equiv 0$ будем использовать обозначения R_λ^0 и L_0 соответственно. Рассмотрим обобщенные средние по Риссу функции $f(x)$: $-\dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r} g(\lambda,r)R_\lambda f\,d\lambda$, где интегрирование ведется по окружностям $|\lambda| = r$, на которых нет собственных значений оператора L, а $g(\lambda,r)$ - произвольная функция, удовлетворяющая следующим условиям:

а) при любом $r > 0$ $g(\lambda,r)$ непрерывна по λ в круге $|\lambda| \le r$ и аналитична в $|\lambda| < r$;

б) существует $C > 0$ такое, что при всех $r > 0$ и $|\lambda| \le r$ выполняется неравенство $|g(\lambda,r)| \le C$;

в) существует $\beta > 0$ такое, что $g(r\exp(i\varphi),r) = O(|\varphi - \pi|^\beta)$ (оценка равномерна по r);

г) $g(\lambda,r) \to 1$ при $r \to \infty$ и фиксированном λ.

Основным результатом настоящей статьи является

ТЕОРЕМА. Для того чтобы обобщенные средние по Риссу функции $f(x)$ сходились к ней по норме $C^1[0,1]$, необходимо и достаточно, чтобы $f(x) \in C^1[0,1]$ и удовлетворяла краевым условиям (1).

Средние Рисса для дифференциальных операторов, когда $g(\lambda,r) = (1 - \dfrac{\lambda^4}{r^4})^\beta$, впервые изучались М. Стоуном [2]. Он показал равносуммируемость в $C[\delta,1-\delta]$ $(0 < \delta < \dfrac{1}{2})$ средних любых двух дифференци-

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 00-01-00075) и программы "Ведущие научные школы" (проект № 00-15-96123).

альных операторов одного и того же порядка с произвольными регулярными краевыми условиями.

Полученный нами результат является усиление теоремы 15 из [3] для случая $n=2$. Суммируемость по Риссу для интегральных операторов изучалась в [4].

Доказательство основной теоремы базируется на следующих вспомогательных утверждениях.

ЛЕММА 1. Пусть $f(x)\in C^1[0,1]$, а $f_0(x)\in C^2[0,1]$ и удовлетворяет (1). Тогда если на окружностях $|\lambda|=r$ нет собственных значений операторов L и L_0, то справедливы формулы:

$$f^{(k)}(x)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r} g(\lambda,r)D_x^k R_\lambda f\,d\lambda = f^{(k)}(x)(1-g(\lambda_0,r))+g(\lambda_0,r)(f^{(k)}(x)-$$

$$-f_0^{(k)}(x))+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r}\frac{g(\lambda,r)}{\lambda-_0}D_x^k R_\lambda h_0\,d\lambda+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r} g(\lambda,r)D_x^k R_\lambda^0(f-f_0)\,d\lambda- \quad (2)$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r} g(\lambda,r)D_x^k R_\lambda(qR_\lambda^0(f-f_0))\,d\lambda,$$

где $k=0,1$; $D_x^k=\dfrac{d^k}{dx^k}$; λ_0 - произвольное комплексное число, не являющееся собственным значением операторов L и L_0, $|\lambda_0|<r$ и $f_0=R_{\lambda_0}h_0$.

Пусть $\lambda=-\rho^2$. Предположим, что $0\le\arg\rho\le\dfrac{\pi}{4}$ (остальные случаи аналогичны). В качестве фундаментальной системы решений уравнения $y''+\rho^2 y=0$ возьмем $\exp\rho ix$ и $\exp(-\rho ix)$. Введем в рассмотрение функцию

$$g(x,t,\rho)=\begin{cases}\dfrac{i}{2\rho}e^{\rho i(x-t)}, & \text{если } t\le x\\ \dfrac{i}{2\rho}e^{\rho i(t-x)}, & \text{если } t\ge x\end{cases}.$$

ЛЕММА 2. Справедливо следующее представление:

$$R_\lambda^0 f=-\{e^{-\rho ix},e^{\rho ix}\}M^{-1}(\rho)\int\limits_0^1 U_x(g)f\,dt+\int\limits_0^1 g(x,t,\rho)f(t)\,dt,$$

где $M(\rho)=(U_{jk})_{j,k=1}^2$; $U_{j1}=U_j(e^{-\rho ix})$;

$U_{j2}=U_j(e^{\rho ix})$; $U_x(g)=\{U_1(g),U_2(g)\}^T$

(левые части краевых условий (1) применяются к $g(x,t,\rho)$ как функции x).

ЛЕММА 3. Предположим, что $f(x) \in C^1[0,1]$ и удовлетворяет (1). Тогда $\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda|=r} g(\lambda, r) D_x^k R_\lambda^0 f \, d\lambda = O(\|f\|)$ при $r \to \infty$, где $\|f\|$ - норма $f(x)$ в $C^1[0,1]$; $k = 0,1$.

Обозначим через Q_1 множество функций из $C^1[0,1]$, удовлетворяющих (1), а через $Q_2 = Q_1 \cap C^2[0,1]$.

ЛЕММА 4. Замыкание Q_2 в норме $C^1[0,1]$ совпадает с Q_1.

Отметим, что замыкание в $C[0,1]$ области определения дифференциального оператора впервые найдено в [5]. С помощью лемм 2 - 4 показывается, что правая часть (2) равномерно стремится к нулю при $r \to \infty$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. 2-е изд. М.: Наука, 1969. 526 с.

2. *Stone M. H.* A comparison of the serios of Fouries and Birkhoff // Trans. Amer. Math. Sos. 1926. Vol. 28. P. 695 - 761.

3. *Kaufmann F. J.* Derived Birkhoff-series associated with $N(y) = \lambda P(y)$ // Results in mathematics. 1989. Vol. 15. P. 256 - 289.

4. *Гуревич А. П., Хромов А. П.* Суммируемость по Риссу спектральных разложений одного класса интегральных операторов // Современные методы теории функций и смежные проблемы: Тез. докл. Воронежской зимней математической школы.Воронеж, 1999. С. 75.

5. *Хромова Г. В.* О регуляризации интегральных уравнений 1-го рода с ядром Грина // Изв. вузов. Математика. 1972. Т. 8(123). С. 94 - 104.

УДК 519.853.3

С. И. Дудов, И. В. Златорунская

ОБ ОЦЕНКЕ ГРАНИЦЫ ВЫПУКЛОГО КОМПАКТА ШАРОВЫМ СЛОЕМ*

1. Пусть D – заданный выпуклый компакт из конечномерного пространства R^p, C – его граница, а функция $n(x)$ удовлетворяет на R^p аксиомам нормы. Обозначим через

$$R(x) = \max_{y \in C} n(x-y), \quad r(x) = \min_{y \in C} n(x-y).$$

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 98-01-00048.