2. *Пенроуз Р.* Твисторная программа // Твисторы и калибровочные поля. М., 1983. С. 13 – 27.

3. *Ермаков Ю. И.* О внутренних связностях и вторичных характеристических классах векторных расслоений с послойной тензорной структурой // Изв. вузов. Матем. 1986. № 1. С. 33 – 43.

УДК 517.928

И. И. Ефремов

БАЗИСНОСТЬ РИССА СОБСТВЕННЫХ И ПРИСОЕДИНЕННЫХ ФУНКЦИЙ ИНДЕФИНИТНЫХ КВАЗИДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ*

Введение. Пусть на отрезке [0,1] задан линейный квазидифференциальный (к.д.) оператор, определяемый выражением

$$D_n y = y^{[n]},$$

$$D_k y = y^{[k]} = iP_{kk}\frac{d}{dx}y^{[k-1]} + \sum_{j=0}^{k-1} P_{kj}y^{[j]}, \text{ где } k = n, n-1, \ldots, 1, \tag{1}$$

$$D_0 y = P_{00}y, \qquad P_{kj} \in L[0,1]$$

и линейно-независимыми нормированными [1, с. 65] краевыми условиями

$$U_\nu(y) = U_{\nu 0}(y) + U_{\nu 1}(y) = 0, \qquad \nu = 1,2,\ldots,n,$$

$$U_{\nu 0}(y) = \alpha_\nu y^{[k_\nu]}(0) + \sum_{j=0}^{k_\nu - 1} \alpha_{\nu j} y^{[j]}(0), \tag{2}$$

$$U_{\nu 1}(y) = \beta_\nu y^{[k_\nu]}(1) + \sum_{j=0}^{k_\nu - 1} \beta_{\nu j} y^{[j]}(1),$$

где $\alpha_{\nu j}, \beta_{\nu j} \in C$, $|\alpha_\nu| + |\beta_j| > 0$ для $1 \le \nu \le n$, $n-1 \ge k_1 \ge \ldots \ge k_n \ge 0$, $k_q > k_{q+2}$ для $q = 1,2,\ldots,n-2$.

Если для любого $k = 0,1,\ldots,n$ функции $P_{kk}(x)$ являются постоянными числами или ступенчатыми функциями (комплексными, отличными от 0), то оператор K, определенный (1), (2), называется индефинитным к.д. оператором.

Рассмотрим задачу о базисности Рисса собственных и присоединенных функций оператора K

$$Ky = \lambda y. \tag{3}$$

---

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 00-01-00075) и программы "Ведущие научные школы" (проект № 00-15-96123).

К.д. выражение $D_n y = y^{[n]}$ является обобщением линейного дифференциального выражения n-го порядка [1, с.13]

$$l(y) = y^{(n)} + P_1 y^{(n-1)} + \ldots + P_n y. \tag{4}$$

Спектральные задачи для оператора K являются обобщением спектральных задач о собственных и присоединенных функциях (с.п.ф.) для дифференциальных операторов с весовой функцией $r(x)$, т.е. задачи вида

$$ly = \lambda r(x) y. \tag{5}$$

Задачи, аналогичные (5), были предметом многочисленных исследований Лангера (см., например, [2]) и других авторов. В этих исследованиях $r(x)$ предполагалась достаточно гладкой функцией, а $l(y)$ имело специальный вид.

W. Eberhard, G. Freiling, A. Schneider (см., например, [3]) в наиболее общем виде рассмотрели спектральные задачи для дифференциальных операторов со ступенчатой весовой функцией $r(x)$. При этом предполагалось, что $r(x)$ принимает только действительные значения, коэффициент $P_1(x)$ в(4) либо тождественно равняется 0, либо является достаточно гладкой функцией, а краевые условия удовлетворяют определенным условиям, называемыми условиями регулярности. При этом вопрос о базисности Рисса с.п.ф. немецкими математиками не рассматривался.

Условия регулярности. Будем далее рассматривать следующие два случая:

P_{nn} - ступенчатая функция, $P_{kk} \equiv 1$ для $k = 0, \ldots, n-1$ (6)

P_{00} - ступенчатая функция, $P_{kk} \equiv 1$ для $k = 1, \ldots, n$. (7)

Пусть отрезок [0,1] разбит на $(m+1)$ интервалов $I_0, I_1, \ldots, I_m$,

$$I_0 = [a_0 = 0, a_1),\ I_1[a_1, a_2),\ \ldots,\ I_m = [a_m, a_{m+1}),$$
$$a_0 = 0 < a_1 < \ldots < a_m < a_{m+1} = 1.$$

Пусть в случае (6) $P_{nn}(x) = \dfrac{1}{r_p}$ для $x \in I_p$, $p = 0, 1, \ldots, m$.

Пусть в случае (7) $P_{00}(x) = \dfrac{1}{r_p}$ для $x \in I_p$, $p = 0, 1, \ldots, m$.

$$R_p = (-1)^{n+1} i^n r_p, \qquad p = 0, 1, \ldots, m. \tag{8}$$

Пусть S - сектор ρ-плоскости, определенный в [4]. Тогда в S-секторе корни n-й степени из $(-R_k)$ - $\{\omega_{kj}\}_{j=1,\ldots n}$ можно занумеровать таким образом, что

$$\operatorname{Re}\rho\omega_{k1} \le \ldots \le \operatorname{Re}\rho\omega_{kn}, \qquad k = 0,1,\ldots,m, \qquad \rho \in S.$$

$$\theta(x_1 \ldots x_\sigma; x_\sigma \ldots x_n) = \begin{vmatrix} \alpha_1 x_1^{k_1} & \ldots & \alpha_1 x_\sigma^{k_1} & \beta_1 x_{\sigma+1}^{k_1} & \ldots & \beta_1 x_n^{k_1} \\ \alpha_2 x_1^{k_2} & \ldots & \alpha_2 x_\sigma^{k_2} & \beta_2 x_{\sigma+1}^{k_2} & \ldots & \beta_2 x_n^{k_2} \\ \ldots & & \ldots & \ldots & & \ldots \\ \alpha_n x_1^{k_n} & \ldots & \alpha_n x_\sigma^{k_n} & \beta_n x_{\sigma+1}^{k_n} & \ldots & \beta_n x_n^{k_n} \end{vmatrix}$$

Определение. Будем говорить, что оператор K порожден регулярными краевыми условиями, если в любом S-секторе отличны от 0 следующие определители:

для $n = 2\mu$

$$\theta(i\omega_{01},\ldots,i\omega_{0\mu}; i\omega_{m\mu+1},\ldots,i\omega_{\mu n}),$$
$$\theta(i\omega_{01},\ldots,i\omega_{0\mu-1}, i\omega_{0\mu+1}; i\omega_{m\mu+1},\ldots,i\omega_{\mu n}),$$
$$\theta(i\omega_{01},\ldots,i\omega_{0\mu}; i\omega_{m\mu}, i\omega_{m\mu+2},\ldots,i\omega_{\mu n});$$

для $n = 2\mu - 1$

$$\theta(i\omega_{01},\ldots,i\omega_{0\mu-1}; i\omega_{m\mu},\ldots,i\omega_{\mu n}),$$
$$\theta(i\omega_{01},\ldots,i\omega_{0\mu}; i\omega_{m\mu+1},\ldots,i\omega_{\mu n}).$$

В этом случае имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА. Пусть для $n = 2\mu$ $\arg r_i - \arg r_j \ne 0$ при $i \ne j$,

для $n = 2\mu - 1$ $\arg r_0 = \ldots = \arg r_m$, где $0 \le \arg r_i$, $\arg r_j < 2\pi$.

Оператор K порожден регулярными краевыми условиями. Тогда собственные и присоединенные функции оператора K, определяемого условиями (1), (2), в случае (6) или (7), образуют базис Рисса в пространстве $L^2[0,1]$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969.

2. *Langer R.* The asymptotic solutions of ordinary linear differential equations of the second order, with spectral reference to the Stokes phenomenon // Bull. Amer. Math. Soc. 1934. Vol. 40. P. 545 - 582.

3. *Eberhard W., Freiling G., Schneider A.* Expansion theorems for a class of regular indefinite eigenvalue problems // Differential and Integral Equations. 1990. Vol. 3. November. P. 1181 - 1200.

4. *Ефремов И. И.* Асимтотика собственных значений индефинитных квазидифференциальных операторов // Математика, механика, математическая кибернетика. Саратов, 1999. С. 32.