УДК 517.984.36

М. Ю. Игнатьев

ПОДОБИЕ ВОЛЬТЕРРОВЫХ ОПЕРАТОРОВ ОПЕРАТОРУ ДРОБНОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ РИМАНА-ЛИУВИЛЛЯ*

Рассмотрим для вещественного $\alpha > 2$ интегральный вольтерров оператор вида

$$M = J^{\alpha} + J^{\alpha+1}N, \tag{1}$$

где N - интегральный вольтерров оператор, J^{α} - оператор дробного интегрирования Римана-Лиувилля

$$J^{\alpha} f(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(t)dt. \tag{2}$$

Статья посвящена установлению, при некоторых условиях, подобия (линейной эквивалентности) оператора M оператору дробного интегрирования J^{α}. Вопросам подобия операторов вида (1) при целых $\alpha = n \in \mathrm{N}$ n-ой степени оператора интегрирования, а также тесно связанным с ними вопросам существования оператора преобразования для дифференциальных операторов n-го порядка посвящено большое число работ различных авторов (см., например, [1 - 4] и др.). Отметим, что для порядков $n > 2$ характерно требование аналитичности ядра оператора N (или коэффициентов дифференциального оператора), причём, как показано в [5] , это требование существенно. Случай нецелых α изучался в ряде работ М. М. Маламуда (см. [6] и др.).

При получении результатов настоящей статьи использовалось развитие метода, предложенного в работах [1, 3, 4] и являющегося, в свою очередь, обобщением метода, применявшегося В. А. Марченко при построении оператора преобразования для оператора Штурма-Лиувилля. Предлагаемый метод позволяет ослабить требования, налагавшиеся в [6] на область аналитичности ядра оператора N, и добиться преемственности с результатами, полученными в [3, 4] для случая целых $\alpha = n \in \mathrm{N}$.

Введем обозначения. Через $D_a, a > 0$ обозначим четырёхугольник в комплексной плоскости с вершинами $\left\{0, a, a(1-\omega)^{-1}, a\left(1-\omega^{-1}\right)^{-1}\right\}$, где $\omega = \exp(2\pi i/\alpha)$; через V обозначим пирамиду в $\mathrm{R} \times \mathrm{C}$: $V = \{(x,\xi) : x \in [0,1], \xi \in \overline{D}_{1-x}\}$. Будем говорить, что вольтерров оператор N является оператором класса A, если он представим в виде

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 00-01-00741.

$$Nf(x)=\int_0^x N(x-t,t)f(t)dt, \tag{3}$$

где функция $N(x,\xi)$ определена и непрерывна на V и при каждом фиксированном $x\in[0,1]$ аналитична по ξ в D_{1-x}.

Основным результатом статьи является следующая

ТЕОРЕМА. Пусть M - оператор вида (1), (2), N - оператор класса A. Тогда найдется вольтерров оператор K класса A такой, что $M=(E+K)J^{\alpha}(E+K)^{-1}$.

Доказательство теоремы основывается на следующих леммах, которые могут представлять также и самостоятельный интерес.

ЛЕММА 1. Пусть N_1,N_2 - вольтерровы операторы класса A. Тогда оператор $N_{2,1}=N_2N_1$ также является оператором класса A:

$$N_{2,1}f(x)=\int_0^x N_{2,1}(x-t,t)f(t)dt,$$

где

$$N_{2,1}(x,\xi)=\int_0^x N_2(x-\tau,\xi+\tau)N_1(\tau,\xi)d\tau.$$

ЛЕММА 2. Для функции

$$\varphi(z,\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n\frac{z^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha+1)},\ \arg z\in(-\pi,\pi] \tag{4}$$

справедливы следующие утверждения:

1) $\varphi(x,\lambda)=\left(\left(E-\lambda J^{\alpha}\right)^{-1}1\right)(x,\lambda),\quad x>0;$

2) $\varphi\left(x\omega^j,\lambda\right)=\varphi(x,\lambda),\quad x>0, j=\overline{-m,m}, m:=[\alpha/2];$

3) $\varphi(x,\lambda)\varphi(y,\lambda)=$

$$=\frac{1}{\alpha}\sum_{j=-m}^{m}\varphi\left(x+\omega^j y,\lambda\right)+\int_0^x g(x-t,y)\varphi(t,\lambda)dt+\int_0^y g(y-t,x)\varphi(t,\lambda)dt,\quad x>0,y>0,$$

где

$$g(x,y)=\frac{-\sin\alpha\pi}{\pi}\cdot\frac{x^{\alpha-1}y^{\alpha}}{x^{2\alpha}-2x^{\alpha}y^{\alpha}\cos\alpha\pi+y^{2\alpha}}. \tag{5}$$

Рассмотрим оператор

$$\Phi_{\lambda}f(x):=\int_0^x\varphi(x-t,\lambda)f(t)dt,$$

где $\varphi(x,\lambda)$ - функция, определяемая (4).

ЛЕММА 3. Пусть для функции $f(x,\lambda)$ справедливо представление $f(x,\lambda)=F\varphi(x,\lambda)$, где F - вольтерров оператор класса A:

$$f(x,\lambda)=\int_0^x F(x-t,t)\varphi(t,\lambda)dt.$$

Тогда для функции $h=\Phi_\lambda f$ справедливо представление $h(x,\lambda)=H\varphi(x,\lambda)$, где H - также вольтерров оператор класса A:

$$h(x,\lambda)=\int_0^x H(x-t,t)\varphi(t,\lambda)dt,$$

причем

$$H(x,\xi)=\widetilde{H}(x)+\hat{H}(x,\xi)+\sum_{j=-m}^{m}H_j(x,\xi),$$

$$\widetilde{H}(x)=\int_0^x dt\int_0^t g(x-t,t-\tau)F(\tau,t-\tau)d\tau,$$

$$\hat{H}(x,\xi)=\int_0^x dt\int_0^t g(t-\tau,x-t)F(\tau,t-\tau+\xi)d\tau,$$

$$\alpha H_j(x,\xi)=\frac{\omega^j}{1-\omega^j}\int_0^x F\left(\tau,\xi+\frac{x-\tau}{1-\omega^j}\right)d\tau-\frac{1}{1-\omega^j}\int_0^x F\left(\tau,\frac{x-\tau}{1-\omega^j}\right)d\tau,\quad j\neq 0,$$

$$\alpha H_0(x,\xi)=\int_0^\xi F(x,t)dt,$$

где $g(x,y)$ - функция, определяемая равенством (5).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сахнович Л. А.* О приведении вольтерровых операторов к простейшему виду и обратных задачах // Изв. АН СССР. Сер. Математика. 1957. Т. 21, № 2. С. 235 - 262.

2. *Сахнович Л. А.* Обратная задача для дифференциальных операторов порядка n>2 с аналитическими коэффициентами // Матем. сборник. 1958. Т. 46, № 1. С. 61 - 76.

3. *Хачатрян И. Г.* Об операторах преобразования для дифференциальных уравнений высших порядков // Изв. АН Арм.ССР. Сер. Математика. 1978. Т.13, № 3. С. 215 - 238.

4. *Седин О. В.* О подобии вольтеррова оператора n-й степени оператора интегрирования // Линейные операторы в функциональных пространствах. Грозный, 1989.

5. *Мацаев В. И.* О существовании оператора преобразования для дифференциальных операторов высших порядков // Докл. АН СССР. 1960. Т. 130, № 3. С. 499 - 502.

6. *Маламуд М. М.* Подобие вольтерровых операторов и смежные вопросы теории дифференциальных уравнений дробных порядков // Тр. ММО. 1994. Т. 55. С. 73 - 148.