УДК 517.968, 517.98

С. Н. Кабанов

ОБЩИЙ ВИД ЛИНЕЙНОГО ФУНКЦИОНАЛА В ОДНОМ ПРОСТРАНСТВЕ, ПОРОЖДЁННОМ ОПЕРАТОРОМ ОБОБЩЕННОГО ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Назовём оператором обобщённого интегрирования оператор вида

$$D_0^{-\alpha,\ell} y(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} \ell(x-t) y(t) dt, \tag{1}$$

где $x \in [0,a]$, $\Gamma(\alpha)$ – гамма-функция Эйлера, $0 < \alpha < 1$, $\ell(x)$ – медленно меняющаяся в нуле функция.

Для оператора (1) существует обратный интегродифференциальный оператор (см. [1]) вида

$$D_0^{\alpha,\ell^*} y(x) = \frac{d}{dx} D_0^{-(1-\alpha),\ell^*} y(x) = \frac{d}{dx} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{-\alpha} \ell^*(x-t) y(t) dt, \tag{2}$$

где ℓ^* такова, что

$$\int_0^x \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \ell(x-t) \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \ell^*(t) dt \equiv 1, \qquad \forall x \in [0,a], \tag{3}$$

при этом

$$D_0^{\alpha,\ell^*} D_0^{-\alpha,\ell} y(x) \overset{п.в.}{=} y(x)$$

$$D_0^{-\alpha,\ell} D_0^{\alpha,\ell^*} y(x) \overset{п.в.}{=} y(x) - \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \ell(x) D_0^{-(1-\alpha),\ell^*}(y)(0). \tag{4}$$

При попытке рассмотреть задачу на собственные функции оператора (2) возникает вопрос о естественном дополнительном условии типа краевого, которое нужно наложить, чтобы иметь возможность однозначно разрешить уравнение вида

$$D_0^{\alpha,\ell^*} y(x) - \lambda y(x) = f(x),$$

где λ – спектральный параметр.

Обозначим $\mathbf{AC}^{D_0^{-(1-\alpha),\ell^*}}$ множество функций $y(x)$, таких, что $D_0^{-(1-\alpha),\ell^*} y(x) \in \mathbf{AC}[0,a]$, при этом $D_0^{\alpha,\ell^*} y(x) \in \mathbf{L}^1[0,a]$.

Введём в $\mathbf{AC}^{D_0^{-(1-\alpha),\ell^*}}$ норму $\|\cdot\|_2$ следующим образом:

$$\|y\|_2 = | D_0^{-(1-\alpha),\ell^*}(y)(0) | + \int_0^a | D_0^{\alpha,\ell^*} y(t) | dt.$$

Положительная однородность и справедливость неравенства треугольника для нормы $\|\cdot\|_2$ легко проверяются в силу линейности рассматриваемых операторов, поэтому проверим справедливость лишь следующего свойства: $\|y\|_2 \geq 0$ и $\| y \|_2 = 0$ тогда и только тогда, когда $y(x) \overset{п.в.}{=} 0$. Неотрицательность нормы $\|\cdot\|_2$ очевидна. Если $y(x) \overset{п.в.}{=} 0$, то, очевидно, $\| y \|_2 = 0$. Пусть теперь $\| y \|_2 = 0$, тогда, в силу определения

$$D_0^{\alpha,\ell^*} y(t) \overset{п.в.}{=} 0, \tag{5}$$

$$D_0^{-(1-\alpha),\ell^*}(y)(0) = 0.$$

Теперь наше утверждение следует из формулы обращения (4) применением к (5) оператора $D_0^{-\alpha,\ell}$.

Тем самым во множестве $\mathbf{AC}^{D_0^{-(1-\alpha),\ell^*}}$ введена структура линейного нормированного пространства. Найдём общий вид линейного ограниченного функционала в пространстве $\mathbf{AC}^{D_0^{-(1-\alpha),\ell^*}}$.

Из формулы (4) видно, что

$$F_2(y) = F_2(D_0^{-\alpha,\ell} D_0^{\alpha,\ell^*} y(x)) + D_0^{-(1-\alpha),\ell^*}(y)(0) F_2\left(\frac{x^{\alpha-1}\ell(x)}{\Gamma(\alpha)}\right),$$

где F_2 – обозначает линейный функционал в пространстве $\mathbf{AC}^{D_0^{-(1-\alpha),\ell^*}}$.

Обозначим $z = D_0^{\alpha,\ell^*} y$. Покажем, что $F_2(D_0^{-\alpha,\ell} z) = F_1(z)$ есть некоторый линейный ограниченный функционал в пространстве $\mathbf{L}^1[0,a]$. В самом деле,

$$\left|F_2(D_0^{-\alpha,\ell} D_0^{\alpha,\ell^*} y)\right| \leq |F_2| \left\|D_0^{-\alpha,\ell} D_0^{\alpha,\ell^*} y\right\|_2 =$$

$$= |F_2| \left(\left| D_0^{-(1-\alpha),\ell^*}\left(y(x) - D_0^{-(1-\alpha),\ell^*}(y)(0)\frac{x^{\alpha-1}\ell(x)}{\Gamma(\alpha)}\right)\Big|_{x=0} \right| + \int_0^a \left| D_0^{\alpha,\ell^*} D_0^{-\alpha,\ell} z(t)\right| dt \right) =$$

$$= |F_2| \cdot \int_0^a |z(t)|\, dt = |F_2| \|z\|_1,$$

где $\|\cdot\|_1$ – обозначение нормы в пространстве $\mathbf{L}^1[0,a]$.

Здесь мы воспользовались тем обстоятельством, что в силу (3)

$$D_0^{-(1-\alpha),\ell^*} \frac{x^{\alpha-1}\ell(x)}{\Gamma(\alpha)} \equiv 1.$$

Таким образом, нахождение общего вида функционала в пространстве $\mathbf{AC}^{D_0^{-(1-\alpha),\ell^*}}$ свелось к нахождению общего вида линейного ограниченного функционала в пространстве $\mathbf{L}^1[0,a]$. Поэтому

$$F_2(y) = F_1(z) + C \cdot D_0^{-(1-\alpha),\ell^*}(y)(0),$$

где $F_1(z)$ – теперь функционал общего вида в $\mathbf{L}^1[0,a]$.

Отсюда, используя формулу для общего вида функционала в $\mathbf{L}^1[0,a]$, получим

$$F_2(y(x)) = C \cdot D_0^{-(1-\alpha),\ell^*} y(0) + \int_0^a D_0^{\alpha,\ell^*} y(t)h(t)dt, \tag{6}$$

где C – некоторая константа, $h(t) \in \mathbf{L}^\infty[0,a]$.
Сформулируем полученный результат.

ТЕОРЕМА. Формула (6) даёт общий вид линейного ограниченного функционала в пространстве $\mathbf{AC}^{D_0^{-(1-\alpha),\ell^*}}$.

Замечание. В случае $D_0^{\alpha,\ell^*} y(x) \in \mathbf{L}^p[0,a]$, $p>1$, формула (6) остаётся справедливой, только при этом $h(t) \in \mathbf{L}^q[0,a]$, $1/p+1/q=1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кабанов С. Н.* Об одном обобщённом операторе дробного дифференцирования // УМН. 1995. Т. 50, вып.4 (304). С. 123.

УДК 517.54

Г. Н. Камышова

О СВОЙСТВАХ НЕКОТОРЫХ ОБОБЩЕННЫХ КОНФОРМНЫХ ИНВАРИАНТОВ*

Четырехугольником Q называется жорданова область $\Omega \subset \overline{C}$ с четырьмя отмеченными граничными точками z_1, z_2, z_3, z_4, которые называются вершинами Q. Модуль $m(Q)$ четырехугольника Q равен отношению длин сторон конформно эквивалентного ему прямоугольника.

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 98-01-00842, INTAS, грант № 99-00089.