УДК 517.972

А. Б. Коноплев

ОБ ОДНОМ СЛУЧАЕ ВОГНУТОСТИ ФУНКЦИИ РАССТОЯНИЯ

Пусть X, Y конечномерные нормированные пространства над R. Рассмотрим многозначное отображение $F: X \to 2^Y$, действующее из X в Y, т. е. отображение, значениями которого являются подмножества пространства Y.

Введем обозначения, которые будут использованы при изложении результата статьи. Множества

$$\operatorname{dom} F = \{x \in X \mid F(x) \neq \varnothing\}, \quad \operatorname{gr} F = \{(x,y) \in X \times Y \mid y \in F(x)\}$$

называются соответственно *эффективной областью* и *графиком* многозначного отображения F.

Определение. Многозначное отображение называется выпуклым, если его график является выпуклым множеством в $X \times Y$.

Хорошо известен [1, с. 101] следующий факт.

ЛЕММА. Многозначное отображение $F(x)$ является выпуклым тогда и только тогда, когда выполняется следующее включение:

$$F(\alpha\, x_1 + (1-\alpha)\, x_2) \supset \alpha\, F(x_1) + (1-\alpha\,)F(x_2),$$

для всех $x_1, x_2 \in X$ и $\alpha \in [0,1]$.

Для любых точек $x \in \operatorname{dom} F$ и $y \in Y$ определим функцию расстояния следующим образом:

$$d_F(z) = \inf_v \{\|y-v\| \mid v \in F(x)\}, \quad z = (x,y).$$

Эта функция используется в негладком анализе для исследования топологических и дифференциальных свойств многозначных отображений и маргинальных функций [2].

ТЕОРЕМА. Пусть $D \subset X \times Y$ - выпуклое, замкнутое множество, обладающее непустой внутренностью, а отображение F удовлетворяет условиям

$$\operatorname{dom} F = pr_X D, \qquad \operatorname{gr} F = \overline{\operatorname{dom} F \times Y \setminus D}. \tag{1}$$

Тогда функция расстояния $d_F(z)$ вогнута на множестве D, то есть для любых $z_1, z_2 \in D$ выполняется неравенство

$$d_F(\alpha z_1 + (1-\alpha) z_2) \geq \alpha\, d_F(z_1) + (1-\alpha) d_F(z_2), \quad \alpha \in [0,1].$$

Доказательство. Обозначим

$$G(x) = \{y \in Y \mid d_F(x,y) > 0\}, \quad G(x,v) = \{y \in Y \mid \|y-v\| < d_F(x,v)\}.$$

Из условий (1) следует, что $F(x) = \{y \in Y \mid d_F(x,y) = 0\}$ для всех $x \in \operatorname{dom} F$. По определению $G(x)$ это означает, что $F(x) = Y \setminus G(x)$ для всех $x \in \operatorname{dom} F$.

Выпуклость $G(x)$ следует непосредственно из определения многозначного отображения $G(x)$, условий (1) и свойств выпуклых множеств (см., например, [3, гл. 2]).

1. Покажем, что

$$G(x,v) \subset G(x) \tag{2}$$

для всех $x \in \operatorname{dom} F, \quad v \in Y$:

а) если $v \notin G(x)$, т. е. $d_F(x,v) = 0$, то $G(x,v) = \varnothing$ и (2) очевидно выполняется;

б) пусть теперь $v \in G(x)$, т. е. по определению $G(x)$, $d_F(x,v) > 0$. Возьмем произвольно $y \in G(x,v)$. Это означает, что

$$d_F(x,v) > \|v - y\| \geq 0. \tag{3}$$

Очевидно, что достаточно рассмотреть случай, когда $y \neq v$. Предположим противное. Пусть $y \notin G(x)$, т. е. $d_F(x,v) = 0$. Тогда $y \in F(x)$, что означает справедливость неравенства

$$\|v - y\| \geq \inf_w \{\|v - w\| \mid \quad w \in F(x)\} = d_F(x,v).$$

Это противоречит (3).

2. Возьмем произвольно точки $z_1 = (x_1, y_1), \quad z_2 = (x_2, y_2): \quad z_1, z_2 \in D$. По лемме и в силу доказанного в пункте 1 имеем

$$G(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \supset \alpha G(z_1) + (1-\alpha)G(z_2), \quad \alpha \in [0,1]. \tag{4}$$

Рассмотрим множество точек, удовлетворяющих неравенству

$$\|\alpha y_1 + (1-\alpha)y_2 - y\| < \alpha d_F(z_1) + (1-\alpha)d_F(z_2), \quad \alpha \in [0,1].$$

Множество всех таких точек образует в пространстве Y открытый шар с центром в точке $\alpha y_1 + (1-\alpha)y_2$ и радиусом $\alpha d_F(z_1) + (1-\alpha)d_F(z_2)$. Обозначим его S.

Покажем, что шар S будет принадлежать выпуклой комбинации $G(z_1), \quad G(z_2)$. Построим точки

$$\hat{y}_i = y_i + d_F(z_i) \cdot \frac{y - \alpha y_1 - (1-\alpha)y_2}{\alpha d_F(z_1) + (1-\alpha)d_F(z_2)}, \quad \alpha \in [0,1], \quad i = 1,2.$$

По построению видно, что $\hat{y}_i \in G(x_i, y_i), \quad y = \alpha \hat{y}_1 + (1-\alpha)\hat{y}_2$. Таким образом, любая точка шара S может быть представлена как выпуклая комбинация точек из $G(z_1), \quad G(z_2)$. Объединяя этот факт с включением (4), получим

$$S \subset G(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2), \quad \alpha \in [0,1]. \tag{5}$$

3. Заметим, что включение (5) равносильно следующему

$$Y \setminus S \supset Y \setminus G(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2), \quad \alpha \in [0,1].$$

А это означает, что справедливо неравенство

$$\inf_{v}\left\{\left\|\alpha y_1+(1-\alpha)y_2-v\right\| \quad v\notin S\right\}\le$$
$$\le\inf_{v}\left\{\left\|\alpha y_1+(1-\alpha)y_2-v\right\| \quad v\in F(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2)\right\}=$$
$$=d_F(\alpha z_1+(1-\alpha)z_2),\quad \alpha\in[0,1].$$

Значение левой части неравенства совпадает с радиусом шара S, откуда и следует утверждение теоремы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Пшеничный Б. Н.* Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М., 1980.

2. *Минченко Л. И., Борисенко О. Ф., Грицай С. П.* Многозначный анализ и возмущенные задачи нелинейного программирования. Минск, 1993.

3. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. М., 1973.

УДК 513.88

В. В. Корнев, А. П. Хромов

ТЕОРЕМА О РАВНОСХОДИМОСТИ СПЕКТРАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ ДЛЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ПЕРЕМЕННЫМ ПРЕДЕЛОМ ИНТЕГРИРОВАНИЯ*

В пространстве $L_2[0,1]$ рассмотрим интегральный оператор

$$Af=\int_0^{1-x}A(1-x,t)f(t)dt, \tag{1}$$

где $A(x,t)$ n раз непрерывно дифференцируема по x и один раз по t при $0\le t\le x\le 1$ и

$$\frac{\partial^j}{\partial x^j}A(x,t)=\delta_{n-1,j} \qquad (\delta_{n-1,j} \text{ - символ Кронекера, } j=0,\ldots,n).$$

Имеет место следующая теорема равносходимости.

ТЕОРЕМА 1. Для любой $f(x)\in L[0,1]$

$$\lim_{r\to\infty}\max_{0<\delta\le x\le 1-\delta}\left|S_r(f,x)-\sigma_r(f,x)\right|=0,$$

где $S_r(f,x)$ – частичная сумма ряда Фурье по собственным и присоединенным функциям оператора (1) для тех характеристических чисел, для ко-

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 00-01-00075, и программы "Ведущие научные школы", проект № 00-15-96123.