$$\inf_v \left\{ \|\alpha y_1 + (1-\alpha) y_2 - v\| \quad v \notin S \right\} \le$$
$$\le \inf_v \left\{ \|\alpha y_1 + (1-\alpha) y_2 - v\| \quad v \in F(\alpha x_1 + (1-\alpha) x_2) \right\} =$$
$$= d_F(\alpha z_1 + (1-\alpha) z_2), \quad \alpha \in [0,1].$$

Значение левой части неравенства совпадает с радиусом шара S, откуда и следует утверждение теоремы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Пшеничный Б. Н.* Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М., 1980.
2. *Минченко Л. И., Борисенко О. Ф., Грицай С. П.* Многозначный анализ и возмущенные задачи нелинейного программирования. Минск, 1993.
3. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. М., 1973.

УДК 513.88

В. В. Корнев, А. П. Хромов

ТЕОРЕМА О РАВНОСХОДИМОСТИ СПЕКТРАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ ДЛЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ПЕРЕМЕННЫМ ПРЕДЕЛОМ ИНТЕГРИРОВАНИЯ*

В пространстве $L_2[0,1]$ рассмотрим интегральный оператор

$$Af = \int_0^{1-x} A(1-x,t) f(t) dt, \tag{1}$$

где $A(x,t)$ n раз непрерывно дифференцируема по x и один раз по t при $0 \le t \le x \le 1$ и

$$\frac{\partial^j}{\partial x^j} A(x,t) = \delta_{n-1,j} \qquad (\delta_{n-1,j} \text{ - символ Кронекера, } j = 0,\dots,n).$$

Имеет место следующая теорема равносходимости.

ТЕОРЕМА 1. Для любой $f(x) \in L[0,1]$

$$\lim_{r\to\infty} \max_{0<\delta\le x\le 1-\delta} |S_r(f,x) - \sigma_r(f,x)| = 0,$$

где $S_r(f,x)$ – частичная сумма ряда Фурье по собственным и присоединенным функциям оператора (1) для тех характеристических чисел, для ко-

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 00-01-00075, и программы "Ведущие научные школы", проект № 00-15-96123.

торых $|\lambda_k| < r^n$, $\sigma_r(f,x)$ – частичная сумма тригонометрического ряда Фурье для тех номеров k, для которых $k\pi < r$.

Для $n=1$ этот результат установлен в [1]. В настоящей статье излагается метод доказательства теоремы 1 для произвольного n.

Обозначим через $R_\lambda^0 = (E - \lambda A_0)^{-1} A_0$ резольвенту Фредгольма оператора

$$A_0 f = \int\limits_0^{1-x} \frac{(1-x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)dt,$$

где E – единичный оператор, а λ – спектральный параметр. Для определенности считаем n четным (случай нечетного n рассматривается аналогично). Введем в рассмотрение краевую задачу

$$z^{(n)} - \lambda D z = BF(x), \tag{2}$$

$$Pz^{(i)}(0) + Qz^{(i)}(1) = 0 \quad (i = 0,\ldots,n-1), \tag{3}$$

где $z(x) = (z_1(x), z_2(x))^T$, $F(x) = (f(x), f(1-x))^T$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$,

$B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Обозначим через $V_j(x,\lambda)$ $(j = 1,\ldots,n)$ матрицы размера 2×2, которые образуют фундаментальную систему решений системы (2), и определим матрицу $\Delta(\lambda)$ размера $2n\times 2n$ по формуле

$$\Delta(\lambda) = (U_{ij}(\lambda))_{i,j=1,\ldots,n},$$

где $U_{ij}(\lambda) = U_i(V_j(x,\lambda))$, $U_i(V(x)) = PV^{(i-1)}(0) + QV^{(i-1)}(1)$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть λ таково, что существует $\Delta^{-1}(\lambda)$. Тогда R_λ^0 тоже существует и

$$R_\lambda^0 f = z_1(x,\lambda) + z_2(x,\lambda), \tag{4}$$

а $z(x,\lambda) = (z_1(x,\lambda), z_2(x,\lambda))^T$ является единственным решением краевой задачи (2), (3), определяемым формулой

$$z(x,\lambda) = -(V_1(x,\lambda),\ldots,V_n(x,\lambda))\Delta^{-1}(\lambda)\int\limits_0^1 U_x(g(x,t,\lambda))BF(t)dt +$$

$$+\int\limits_0^1 g(x,t,\lambda)BF(t)dt, \tag{5}$$

где $U_x(g(x,t,\lambda)) = (U_1(g(x,t,\lambda)),\dots,U_n(g(x,t,\lambda)))^T$ относительно переменной x, а $g(x,t,\lambda)$ – матрица размера 2×2 такая, что $\int\limits_0^1 g(x,t,\lambda)BF(t)dt$ является частным решением (2).

Эта теорема позволяет оценить R_λ^0 при больших $|\lambda|$. Для этого λ-плоскость разбивается на четыре сектора $(k-1)\dfrac{\pi}{2} \le \arg\lambda \le k\dfrac{\pi}{2}$ $(k=1,2,3,4)$, в каждом из которых определенным образом выбирается фундаментальная система $\{V_j(x,\lambda)\}$ и подбирается матрица $g(x,t,\lambda)$. Далее, на основе формул (4), (5) доказывается , что в области S, получающейся из λ-плоскости после удаления нулей $\det\Delta(\lambda)$ вместе с окрестностями одного и того же достаточно малого радиуса, справедливы следующие оценки.

ТЕОРЕМА 3. $\left\|R_\lambda^0 f\right\|_\infty = O(|\rho|^{1-n})\|f\|_1;$

$$\left\|R_\lambda^0 f\right\|_\infty = O(|\rho|^{1-n}\psi(\rho))\|f\|_\infty; \tag{6}$$

$$\left\|R_\lambda^0 f\right\|_1 = O(|\rho|^{1-n}\psi(\rho))\|f\|_1; \quad \left\|R_\lambda^0 \chi\right\|_\infty = O(|\rho|^{-n}),$$

где $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_\infty$ – нормы пространств $L[0,1], L_\infty[0,1]$, $\rho^n = \lambda, \psi(\rho) = \sum\limits_{j=1}^{2n} \dfrac{1-\exp(-|\operatorname{Re}\rho\omega_j|)}{|\operatorname{Re}\rho\omega_j|}$, $\omega_1,\dots,\omega_{2n}$- корни $2n$-й степени из 1, $\chi(x)$ – характеристическая функция произвольного интервала $[\eta_0,\eta_1]\subset[0,1]$.

Между R_λ^0 и R_λ существует следующая связь:

$$R_\lambda = R_\lambda^0 + R_\lambda^0 T(E - D^{n-1}SR_\lambda^0 T)^{-1} D^{n-1} SR_\lambda^0, \tag{7}$$

где T – интегральный оператор с ограниченным ядром, $Sf = f(1-x)$, $D = \dfrac{d}{dx}$.

Представление (7) и оценки (6) позволяют доказать следующую теорему.

ТЕОРЕМА 4. Для любой функции $f(x) \in L[0,1]$

$$\lim_{k\to\infty} \left\| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda|=r_k} (R_\lambda f - R_\lambda^0 f)d\lambda \right\|_\infty = 0,$$

где окружности $|\lambda| = r_k$ находятся в S, $r_k \uparrow \infty$.

Из этой теоремы следует, что спектральные разложения, порождаемые операторами A и A_0, равносходятся. В то же время теорема 1 справедлива для оператора A_0, так как $(A_0^2)^{-1}$ есть дифференциальный оператор $l(y)=y^{(2n)}$ с регулярными краевыми условиями. Отсюда следует справедливость теоремы 1 и для оператора A.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Хромов А. П.* Теорема равносходимости для интегрального оператора с переменным верхним пределом интегрирования // Метрическая теория функций и смежные вопросы анализа: Сб. статей, посвященный 70-летию П. Л. Ульянова. М.: Изд-во АФЦ, 1999. С. 255 - 266.

УДК 517.984

П. М. Кудишин

СТРУКТУРНЫЕ СВОЙСТВА СПЕКТРАЛЬНЫХ ДАННЫХ*

Рассмотрим дифференциальное уравнение и линейные формы (ℓ, V_p)

$$\ell y \equiv y^{(n)} + \sum_{j=0}^{n-2}\left(\frac{\nu_j}{x^{n-j}} + q_j(x)\right)y^{(j)} = \lambda y, \quad 0 < x < T, \tag{1}$$

$$V_p(y) \equiv y^{(n-p)}(T) + \sum_{j=0}^{n-p-1} v_{pj} y^{(j)}(T), \quad p = \overline{1, n-1}. \tag{2}$$

Пусть $\mu_1, \ldots, \mu_n$ – корни характеристического многочлена

$$\delta(\mu) = \prod_{k=0}^{n-1}(\mu - k) + \sum_{j=0}^{n-2}\nu_j \prod_{k=0}^{j-1}(\mu - k).$$

Для определенности будем считать, что $\mu_k - \mu_j \neq sn$ $(s = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ и $\Re\mu_1 < \ldots < \Re\mu_n$. Пусть функции $q_j^{(m)}(x), m = \overline{0, j-1}$, абсолютно непрерывны на $[\alpha, T]$ для любого $\alpha > 0$, и $q_j^{(m)}(x) x^{n-1-\Re(\mu_n - \mu_1) - j + m} \in L(0,T), m = \overline{0, j}$. При этом будем говорить, что система $(\ell, V_p) \in U$.

Дифференциальное уравнение (1) имеет фундаментальную систему решений $S_j(x, \lambda)$, $j = \overline{1, n}$, причем $S_j(x, \lambda)$ являются целыми по λ и

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант №00-01-00741.