УДК 517.948.34

Ю. В. Курышова

ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА

Рассмотрим на отрезке $[0,\pi]$ спектральную задачу $L = L(q(x), M(x,t), R(x), V(x))$:

$$\ell y \equiv -y'' + q(x)y + \int_0^x M(x,t)y(t)dt + R(x)\int_0^\pi V(t)y(t)dt = \lambda y, \tag{1}$$

$$y(0) = y'(0) = 0, \tag{2}$$

где $q(x)$, $M(x,t)$, $R(x)$, $V(x)$ – непрерывные функции. Нетрудно показать, что собственные значения $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ задачи (1), (2) совпадают с нулями функции

$$\Delta(\lambda) = 1 - \int_0^\pi V(t)u(t,\lambda)dt, \tag{3}$$

где функция $u(t,\lambda)$ является решением следующей задачи Коши:

$$-u'' + q(x)u + \int_0^x M(x,t)u(t)dt + R(x) = \lambda u, \tag{4}$$

$$u(0) = u'(0) = 0.$$

То есть $\Delta(\lambda)$ есть характеристическая функция задачи (1), (2). При этом, если $\kappa_n \geq 1$ – кратность нуля λ_n функции $\Delta(\lambda)$, то функции $u_{j,n}(x) := \frac{\partial^j}{\partial\lambda^j}u(x,\lambda)\big|_{\lambda=\lambda_n}$, $j = \overline{0,\kappa_n - 1}$, являются собственными и присоединёнными функциями задачи L.

Обозначим $\alpha_{jn} := u_{j,n}(\pi)$. Совокупность чисел $\{\lambda_n, \alpha_{jn}\}_{j=\overline{0,\kappa_n-1}, n\in N}$ называется спектральными данными (СД) задачи L. В настоящей статье рассматривается обратная задача восстановления функций $R(x)$,$V(x)$ по спектральным данным при известных $q(x)$ и $M(x,t)$, если a priori известно, что

$$R(x) \sim C_\alpha x^\alpha, \; V(\pi - x) \sim D_\beta x^\beta, \; x \to +0, \; C_\alpha \cdot D_\beta \neq 0, \tag{5}$$

$\alpha, \beta \geq 0$ – фиксированные параметры, C_α и D_β – константы.

В случае оператора 1-го порядка подобная задача рассматривалась в [1]. Пусть наравне с задачей L имеется задача $\widetilde{L} = L(q, M, \widetilde{R}, \widetilde{V})$ того же вида. Объекты последней задачи будем помечать тильдой.

Для решения обратной задачи в указанной постановке имеет место следующая теорема единственности.

ТЕОРЕМА. Пусть $\{\lambda_n, \alpha_{jn}\}$ – СД задачи L, а $\{\tilde{\lambda}_n, \tilde{\alpha}_{jn}\}$ – СД задачи $\tilde{L}$. Если при любом натуральном n $\lambda_n = \tilde{\lambda}_n$ (с учётом кратности) и $\alpha_{jn} = \tilde{\alpha}_{jn}$, $j = \overline{0, \kappa_n - 1}$, то $R(x) = \tilde{R}(x)$, $V(x) = \tilde{V}(x)$, $x \in [0, \pi]$.

С х е м а д о к а з а т е л ь с т в а. Пусть $S(x, \lambda)$ есть решение уравнения (4), когда $R(x) = 0$, при начальных условиях $S(0, \lambda) = 0$, $S'(0, \lambda) = 1$. Обозначим $\lambda = \rho^2$. Имеет место (см. [2]) следующее представление:

$$S(x,\lambda) = \frac{\sin \rho x}{\rho} + \int_0^x K(x,t) \frac{\sin \rho t}{\rho} dt, \tag{6}$$

где $K(x,t)$ – непрерывная функция.

Решение задачи Коши (4) может быть представлено следующим образом:

$$u(x,\lambda) = \int_0^x g(x,t,\lambda) R(t) dt, \tag{7}$$

где функция Грина $g(x,t,\lambda)$, определённая на $[0,\pi] \times [0,x]$, удовлетворяет уравнению

$$-g''(x,t,\lambda) + q(x) g(x,t,\lambda) - \lambda g(x,t,\lambda) + \int_t^x M(x,\xi) g(\xi,t,\lambda) d\xi = 0$$

и начальным условиям

$$g(t,t,\lambda) = 0, \quad g'_x(t,t,\lambda) = 1.$$

Делая замену независимого переменного в последнем уравнении $x = x' + t$ при каждом фиксированном t, придём к представлению функции $g(x,t,\lambda)$, аналогичному представлению (6):

$$g(x,t,\lambda) = \frac{\sin \rho(x-t)}{\rho} + \int_0^{x-t} P(x,t,\tau) \frac{\sin \rho \tau}{\rho} d\tau,$$

где $P(x,t,\tau)$ — непрерывная функция.

Подставляя полученное выражение для функции Грина в равенство (7), после некоторых преобразований получим формулу для функции $u(x,\lambda)$:

$$u(x,\lambda) = \int_0^x \frac{\sin \rho t}{\rho} \left(R(x-t) + \int_0^{x-t} P(x,\tau,t) R(\tau) d\tau \right) dt. \tag{8}$$

Подставляя выражение для $u(x,\lambda)$ из (8) в формулу (3), получим

$$\Delta(\lambda) = 1 - \int_0^\pi \frac{\sin \rho t}{\rho} B(t) dt, \tag{9}$$

где $B(t) = -\int_t^\pi V(s)(R(s-t) + \int_0^{s-t} P(s,\tau,t) R(\tau) d\tau) ds$.

Используя асимптотическое поведение (5) функций R и V на левом и правом концах отрезка, получим асимптотическое представление функции $\Delta(\lambda)$ при $|\lambda| \to \infty$, $\arg\lambda = \theta \neq 0$, $\operatorname{Im}\rho > 0$

$$\Delta(\lambda) = A_\gamma \rho^{-\gamma-2} e^{-i\rho\pi}(1 + O(1/\rho)), \qquad \gamma = \alpha + \beta + 1, \tag{10}$$

а при $\lambda \in \mathrm{R}^+$, $\lambda \to +\infty$,

$$\Delta(\lambda) = 1 + O(1/\rho). \tag{11}$$

Для задачи $\widetilde{L}$ имеют место соотношения:

$$\widetilde{u}(x,\lambda) = \int_0^x g(x,t,\lambda)\widetilde{R}(t) dt, \quad \widetilde{\Delta}(\lambda) = 1 - \int_0^\pi \widetilde{V}(t)\widetilde{u}(t,\lambda) dt.$$

По условиям теоремы функция $\Delta(\lambda)[\widetilde{\Delta}(\lambda)]^{-1}$ является целой аналитической порядка $1/2$ без нулей и при $\lambda \in \mathrm{R}^+$, $\lambda \to +\infty$, $\Delta(\lambda)[\widetilde{\Delta}(\lambda)]^{-1} = 1 + O(\rho^{-1})$. Следовательно, $\Delta(\lambda) \equiv \widetilde{\Delta}(\lambda)$.

Рассмотрим функцию $\Phi(\lambda) = [\Delta(\lambda)]^{-1}[u(\pi,\lambda) - \widetilde{u}(\pi,\lambda)]$. В условиях теоремы функция $\Phi(\lambda)$ также является целой аналитической порядка $1/2$, причём из (8), (10) и (11) имеем, что $|\Phi(\lambda)| \le C|\lambda|^{1/2}$ и $\lim \Phi(\lambda) = 0$ при $\lambda \in \mathrm{R}^+$, $\lambda \to +\infty$. Следовательно, $\Phi(\lambda) \equiv 0$ или $u(\pi,\lambda) = \widetilde{u}(\pi,\lambda)$.
Далее, используя представление (8), приходим к тождеству

$$R(x) - \widetilde{R}(x) + \int_0^x (R(\tau) - \widetilde{R}(\tau)) P(\pi,\tau,\pi - x) d\tau \equiv 0.$$

Так как однородное уравнение Вольтерра имеет только нулевое решение, заключаем, что $R(x) = \widetilde{R}(x)$. Для доказательства равенства $V(x) = \widetilde{V}(x)$ на $[0,\pi]$ нужно применить метод, использованный в [1] для доказательства аналогичного результата. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Юрко В. А.* Обратная задача для интегродифференциальных операторов 1-го порядка // Функц. анализ: Межвуз. сб. науч. тр. Ульяновск, 1984.

2. *Юрко В. А.* Обратная задача для интегродифференциальных операторов // Матем. заметки. 1991. Вып.5. Т. 50.