УДК 517.862

А. Л. Лукашов

НЕРАВЕНСТВА ТИПА БЕРНШТЕЙНА ДЛЯ ПРОИЗВОДНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ НА НЕСКОЛЬКИХ ОТРЕЗКАХ*

Хорошо известна та роль, которую играют неравенства Бернштейна в теории приближений и других вопросах анализа. Их различным обобщениям и уточнениям посвящена обширная литература, в том числе книги [2, 5, 6]. Тем не менее весьма мало изучен случай, когда значения полинома задаются на несвязных множествах (см.[1, 5]).

Статья посвящена получению аналогов неравенства Бернштейна для производных первого и высшего порядков многочленов на нескольких отрезках.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $p_n \in \pi_n$. Тогда для любого $x \in \operatorname{int}(E)$

$$\left|p_n'(x)\right| \le \max_{\varepsilon\in\{-1,1\}^{m-1}} \sqrt{\left|\frac{\prod_{j=1}^{m-1}\left(x-a_{2j+\frac{1+\varepsilon_j}{2}}\right)}{\prod_{j=1}^{m-1}\left(x-a_{2j+\frac{1-\varepsilon_i}{2}}\right)}\right|}\,\frac{n}{\sqrt{1-x^2}}\left\|p_n\right\|_{C(E)}.$$

Доказательство. Из теоремы 3 [1] следует, что многочлен p_n^*, экстремальный в задаче

$$\frac{\left|p'_n(\varsigma)\right|}{\left\|p_n\right\|_{C(E)}} = \max_{q_n\in\pi_n,\, q_n\neq 0}\frac{\left|q_n'(\varsigma)\right|}{\left\|q_n\right\|_{C(E)}},$$

является многочленом типа Золотарева на E, т. е. имеет на E не менее n точек альтернанса. Теперь рассуждения, аналогичные использованным в [3], показывают, что найдутся числа $\widetilde{a}_1,\ldots,\widetilde{a}_{2l}$, $1\le l\le 2m$, и $\widetilde{c}_1,\ldots,\widetilde{c}_{l-1}$, $\widetilde{a}_{2i}<\widetilde{c}_i<\widetilde{a}_{2i+1}$, $i=1,\ldots,l-1$, такие, что

$$p^*_n(x) = c\cos\int_{\widetilde{a}_1}^{x}\frac{n\prod_{k=1}^{l-1}(x-\widetilde{c}_k)}{\sqrt{\left|\prod_{k=1}^{2l}(x-\widetilde{a}_k)\right|}}\,dx.$$

---

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 99-01-01120, и программы “Ведущие научные школы”, проект № 00-15-96123.

Осталось заметить, что в силу расположения точек $\tilde{a}_1,\dots,\tilde{a}_{2l}$, относительно $a_1,\dots,a_{2m}$ можно утверждать, используя рассуждения, подобные приведенным в [1, 4], что

$$\frac{\left|\prod\limits_{k=1}^{l-1}(x-\tilde{c}_k)\right|}{\sqrt{\left|\prod\limits_{k=1}^{2l}(x-\tilde{a}_k)\right|}} \le \max_{\varepsilon\in\{-1,1\}^{m-1}} \sqrt{\left|\frac{\prod\limits_{j=1}^{m-1}\left(x-a_{2j+\frac{1+\varepsilon_j}{2}}\right)}{\prod\limits_{j=1}^{m-1}\left(x-a_{2j+\frac{1-\varepsilon_j}{2}}\right)}\right|}\cdot\frac{n}{\sqrt{1-x^2}}, x\in \operatorname{int}(E).$$

В качестве примера рассмотрим случай

$$x\in(a_1,a_2), \tilde{a}_1=a_1, \tilde{a}_2=a_2<\tilde{a}_3<\tilde{a}_4<\tilde{a}_5<\tilde{a}_6<\tilde{a}_7=a_3.$$

Тогда

$$\frac{\left|(x-\tilde{c}_1)(x-\tilde{c}_2)(x-\tilde{c}_3)\cdot\prod\limits_{k=4}^{l-1}(x-\tau_k)\right|}{\sqrt{\left|\prod\limits_{k=1}^{2l}(x-\tilde{a}_k)\right|}} \le \frac{|x-\tilde{a}_3|\cdot|x-\tilde{a}_5|\cdot|x-a_3|}{\sqrt{|x-a_1|\cdot|x-a_2|\cdot|x-\tilde{a}_3|\cdot|x-\tilde{a}_5|}}\times$$

$$\times\frac{\prod\limits_{k=3}^{l-1}|x-\tilde{c}_k|}{\sqrt{|x-a_3|}\cdot\sqrt{\left|\prod\limits_{k=8}^{2l}(x-\tilde{a}_k)\right|}} \le \sqrt{\left|\frac{x-a_3}{x-a_2}\right|\cdot\frac{1}{\sqrt{x+1}}\cdot\frac{\prod\limits_{k=3}^{l-1}(x-\tilde{c}_k)}{\sqrt{\left|\prod\limits_{k=8}^{2l}(x-\tilde{a}_k)\right|}}}.$$

Замечание. Точность приведенной теоремы можно утверждать лишь на всем классе систем отрезков (включающем случай одного отрезка, когда теорема 1 превращается в классическое неравенство Бернштейна). Для конкретной системы отрезков ответ на вопрос о точности данного неравенства автору неизвестен.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $p\in\pi_n$. Тогда для любого $x\in\operatorname{int}(E)$ и $k<n$

$$\left|p^{(k)}(x)\right| \le \frac{k^{k-1}}{(k-1)!}\left(\frac{n}{\sqrt{1-x^2}}\max_{\varepsilon\in\{-1,1\}^{m-1}}\sqrt{\left|\frac{\prod\limits_{j=1}^{m-1}\left(x-a_{2j+\frac{1+\varepsilon_j}{2}}\right)}{\prod\limits_{j=1}^{m-1}\left(x-a_{2j+\frac{1-\varepsilon_j}{2}}\right)}\right|}\right)^k\cdot\|p\|_{C(E)}.$$

Доказательство. Пусть $x\in(a_1,a_2)$.

Тогда $$\max_{\varepsilon\in\{-1,1\}^{m-1}} \sqrt{\left|\frac{\prod_{j=1}^{m-1}\left(x-a_{2j+\frac{1+\varepsilon_j}{2}}\right)}{\prod_{j=1}^{m-1}\left(x-a_{2j+\frac{1-\varepsilon_j}{2}}\right)}\right|} = \sqrt{\left|\frac{\prod_{j=1}^{m-1}(x-a_{2j+1})}{\prod_{j=1}^{m-1}(x-a_{2j})}\right|}.$$

Теперь положим подобно [2, с. 252]

$$a_1^{(j)} = x - \frac{(k-j)(x-a_1)}{k}, a_2^{(j)} = x + \frac{(k-j)(a_2-x)}{k},$$

$$E^{(j)} = [a_1^{(j)}, a_2^{(j)}] \bigcup (\bigcup_{i=2}^{m} [a_{2i-1}, a_{2i}]).$$

По теореме 1

$$\left\|p^{(j)}\right\|_{C(E^{(j)})} \le n \cdot \sqrt{\frac{\prod_{i=1}^{m-1}(x-a_{2i+1})}{(x-a_2^{(j-1)})\prod_{i=2}^{m-1}(x-a_{2i})}} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1-x)(x-a_1^{(j-1)})}} \cdot \left\|p^{(j-1)}\right\|_{C(E^{(j-1)})}.$$

Отсюда с учётом равенств

$$x - a_2^{(j-1)} = (x-a_2) \cdot \frac{k-j+1}{k}, \quad x - a_1^{(j-1)} = (x-a_1) \cdot \frac{k-j+1}{k}$$

получим $\left\|p^{(j)}\right\|_{C(E^{(j)})} \le \dfrac{k}{k-j+1} \cdot n \sqrt{\dfrac{\prod_{i=1}^{m-1}(x-a_{2i+1})}{\prod_{i=2}^{m-1}(x-a_{2i})}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \left\|p^{(j)}\right\|_{C(E^{(j-1)})}$.

Полагая в этом неравенстве последовательно $j = 1,\ldots,k$, получим требуемое.

Замечание. Константа в данном неравенстве не является наименьшей даже в случае одного отрезка (см.[2, упр. Е. 5]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Borwein P. B.* Markov`s and Bernstein`s inequalities on disjoint intervals // Can. J. Math.1981.Vol. 33. P. 201 - 209.

2. *Borwein P., Erdelyi T.* Polynomials and polynomial inequalities. N. Y.: Springer, 1995.

3. *Lukashov A. L.* On Chebyshev – Markov rational functions over several intervals // J. Approx. Theory. 1998. Vol. 95. P. 333 - 352.

4. *Лукашов А.Л.* Неравенство типа Бернштейна для производных рациональных функций на двух интервалах // Матем. заметки. 1999. Т. 66. С. 508 - 514.

5. *Milovanovic G. V., Mitrinović D. S., Rassias Th. M.* Topics in polynomials: extremal problems, inequalities, zeros. Singapore: World Sc., 1994.

6. *Rahman Q. I., Schmeisser Q.* Les inequalites de Markoff et de Bernstein. Montreal, 1983.

УДК 517.984

Д. С. Лукомский

О МАТРИЦЕ ВЕЙЛЯ ДЛЯ ПУЧКОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ НА ПОЛУОСИ*

Рассмотрим дифференциальное уравнение и линейные формы вида:

$$ly \equiv y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-2} P_k(x,\rho)y^{(k)} = 0, \quad P_k(x,\rho) = \sum_{i=k}^{n} \rho^{n-i} p_{ki}(x), \quad x \in (0,+\infty) \qquad (1)$$

$$U_\xi(y) = y^{(n-\xi)}(0) + \sum_{k=1}^{n-\xi} \rho^k u_{k\xi}(\rho) y^{(n-k-\xi)}(0), \quad u_{k\xi}(\rho) = \sum_{i=0}^{k} \frac{\beta_{k,k+i}^{(\xi)}}{\rho^i}.$$

Полагаем, что p_{kk}, $\beta_{k,k+i}^{(\xi)}$ – константы, $p_{ki}(x) \in L(0,\infty)$, $p_{k,k+1}(x) \in W^1(0,\infty)$, $k = \overline{1,n}$, $i = \overline{k+1,n}$.

Прямые и обратные задачи для пучков дифференциальных операторов исследовались во многих работах (см. [1, 2] и литературу в них).

Пусть $\{R_k\}_{k=1}^n$ – корни характеристичекого уравнения $F(R) = \sum_{k=0}^n p_{kk}R^k = 0$, $(p_{nn} = 1)$. Считаем, что $R_k - R_j \neq 0$, $k \neq j$ и $R_k \neq 0$, $k = \overline{1,n}$.

Известно, что комплексную ρ-плоскость можно разбить на конечное число секторов S_ν так, что внутри них корни $\{R_k\}_{k=\overline{1,n}}$ можно занумеровать следующим образом:

$$\mathrm{Re}(\rho R_1) < \mathrm{Re}(\rho R_2) < \ldots < \mathrm{Re}(\rho R_n) \quad \forall \rho \in S_\nu . \qquad (2)$$

Пусть $\rho \in S_\nu$ и функции $\Phi(x,\rho) = [\Phi_m(x,\rho)]_{m=\overline{1,n}}$ являются решениями уравнения (1) при условиях $U_\xi(\Phi_m) = \delta_{\xi m}$ $(\xi = \overline{1,m})$, а также $\Phi_m(x,\rho) = O\left(e^{\rho R_m x + \alpha_m(x)}\right)$, $R_k, k = \overline{1,n}$ занумерованы в порядке (2), где

$$\alpha_m(x) = -\int_0^x \frac{\sum_{j=0}^{n-2} p_{j,j+1}(\xi) R_m^j d\xi}{F'(R_m)}.$$

---

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 00-01-00741.