УДК 519.4

С. И. Небалуев

СРАВНЕНИЕ ТОЛЕРАНТНЫХ И КОМБИНАТОРНЫХ КОГОМОЛОГИЙ

Толерантное пространство представляет собой пару (X,τ), где X – некоторое множество, а $\tau \subset X \times X$ – рефлексивное и симметричное бинарное отношение.

Максимальные подмножества $L \subset X$ с попарно толерантными элементами называются классами толерантности. Они образуют покрытие множества X.

Сопутствующее отношению τ ядерное отношение ε_τ разбивает множество X на ядра толерантности.

Отображения толерантных пространств, сохраняющие классы и ядра, называются толерантными отображениями.

Для толерантных отображений имеется полностью развитая теория толерантной гомотопии [1], из которой, в частности, следует толерантная стягиваемость любого подмножества в класс толерантности.

Каждому толерантному пространству (X,τ) сопоставим симплициальный комплекс $S(X)$, вершинами которого являются ядра толерантности, а симплексами – конечные наборы ядер с попарно толерантными представителями. Группы когомологий этого симплициального комплекса обозначим $H^*(X)=\bigoplus\limits_{q\geq 0} H^q(X)$ и назовём толерантными когомологиями толерантного пространства (X,τ). Эти когомологии являются толерантными гомотопическими инвариантами [1].

Пусть имеется покрытие $X=\bigcup\limits_{\alpha\in I} L_\alpha$. Особый интерес представляют покрытия $L=\{L_\alpha\}_{\alpha\in I}$, состоящие из классов толерантности. Тогда можно рассматривать симплициальный комплекс $S(L)$, представляющий собой нерв покрытия [2]. Когомологии $H^*(L)=\bigoplus\limits_{q\geq 0} H^q(L)$ этого симплициального комплекса называются комбинаторными когомологиями Александрова-Чеха покрытия L.

Определение. Пусть (X,τ) толерантное пространство. Покрытие $L=\{L_\alpha\}_{\alpha\in I}$ множества X назовём хорошим покрытием, если выполнены следующие условия:

1) все покрывающие множества L_α – классы толерантности;
2) множество I – не более чем счетно;

3) всякий класс толерантности K пространства (X, τ) покрывается конечным числом классов L_α из L:

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{n(K)} L_{\alpha_i},$$

причём в $\bigcap_{i=1}^{n(K)} L_{\alpha_i}$ имеется достаточно много точек, чтобы произвести барицентрическое подразделение любого симплекса из K.

ТЕОРЕМА 1. Пусть (X, τ) – толерантное пространство с хорошим покрытием $L = \{L_\alpha\}_{\alpha \in I}$. Тогда толерантные когомологии пространства (X, τ) и комбинаторные когомологии Александрова-Чеха покрытия L изоморфны

$$H^*(X) \cong H^*(L).$$

Доказательство основано на методе А. Вейля для сравнения когомологий [3].

С помощью теоремы 1 доказывается следующая удивительная с топологической точки зрения теорема.

ТЕОРЕМА 2. Пусть (X, τ) – толерантное пространство с конечным хорошим покрытием $L = \{L_1, \dots, L_n\}$, пусть $\tilde{X} \subset X$ – конечное подмножество, состоящее из точек, выбранных ровно по одной из каждого непустого пересечения $L_{\alpha_1} \cap \dots \cap L_{\alpha_i}$ $(i = \overline{1, n})$. Тогда подпространство $\left(\tilde{X}, \tilde{\tau}\right)$ с индуцированной толерантностью имеет те же когомологии, что и само пространство (X, τ): $H^*(\tilde{X}) \cong H^*(L)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Небалуев С. И.* Алгебро-топологические характеристики толерантных пространств // Математика и её приложения. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1991.

2. *Спеньер Э.* Алгебраическая топология. М.: Мир, 1997.

3. *Ботт Р., Ту Л. В.* Дифференциальные формы в алгебраической топологии. М.: Наука, 1989.