2. *Тимофеев В. Г.* Пример построения функций с наперед заданными свойствами. Саратов, 1999. 12 с. Деп. в ВИНИТИ 18.05.99, № 1561-В99.

3. *Тимофеев В. Г.* О неподвижной точке одного специального отображения. Саратов, 1999. 10 с. Деп. в ВИНИТИ 18.05.99, № 1560-В99.

УДК 517.928

**В. А. Халова**

# ЗАДАЧА ОБРАЩЕНИЯ ОДНОГО КЛАССА ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ*

Задача точного обращения интегрального оператора вида

$$Af = \int_0^1 A(x,t) f(t)dt, \qquad x \in [0,1]$$

представляет значительный интерес, в частности, при изучении сходимости спектральных разложений (см., например, [1]).

В настоящей статье полностью решается эта задача для интегрального оператора

$$Af = \alpha_1 \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)dt + \alpha_2 \int_0^{1-x} \frac{(1-x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)dt + \sum_{k=1}^m g_k(x)(f, v_k), \quad (1)$$

$$x \in [0,1],$$

где $(f, v_k) = \int_0^1 f(t) v_k(t) dt$, $g_k(x) \in C^n[0,1]$, $v_k(x) \in C^n[0,1]$, последовательности $\{g_k^{(n)}(x)\}_1^m$, $\{v_k(t)\}_1^m$ линейно независимы, $\beta = \alpha_1^2 - \alpha_2^2 \neq 0$.

Полученные результаты являются обобщением результатов А. П. Хромова [2], относящихся к оператору вида (1), когда $n = 1$ и $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0$.

Обозначим $Sf(x) = f(1-x)$, $T = \alpha_1 - \alpha_2 S$, $D = \frac{d}{dx}$.

Справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. Оператор $A^{-1}$ существует тогда и только тогда, когда

$$rang\ \Gamma = m, \qquad (2)$$

где $\Gamma$ - матрица размера $(n+m) \times m$ с элементами

* Работа выполнена при поддержке программы “Ведущие научные школы”, проект № 00-15-96123.

$$\gamma_{jk} = \begin{cases} D^{j-1}Tg_k(0), & j = 1,\dots,n \\ \beta\delta_{k,j-n} + (D^n Tg_k, v_{j-n}), & j = n+1,\dots,n+m \end{cases}, \quad k = 1,\dots,m,$$

$\delta_{i,j}$ - символ Кронекера.

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 1 в [2].

Пусть выполняется (2). Для определенности, пусть отличен от нуля минор $\Delta$, состоящий из следующих строк матрицы $\Gamma$:

$$D^{i_\mu}Tg_k(0), \qquad \mu = 1,\dots,s, \ k = 1,\dots,m, \ 0 \le i_1 < i_2 < \dots < i_s \le n-1,$$

$$\beta\delta_{k,j_\mu} + (D^n Tg_k, v_{j_\mu}), \qquad \mu = s+1,\dots,m, \quad 1 \le j_{s+1} < j_{s+2} < \dots < i_m \le m,$$
$$k = 1,\dots,m,$$

где $s$ - фиксированное число $1 \le s \le m$.

Тогда справедлива

ТЕОРЕМА 2. Если $\Delta \ne 0$, то справедлива формула

$$A^{-1}y = \frac{1}{\beta}\left( D^n Ty(x) - \frac{1}{\Delta}\sum_{k=1}^{m} D^n Tg_k(x)\left[ \sum_{\mu=1}^{s} \Delta_{\mu k} D^{i_\mu} Ty(0) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \sum_{\mu=s+1}^{m} \Delta_{\mu k}(D^n Ty, v_{j_\mu}) \right]\right), \tag{3}$$

причем $y(x)$ удовлетворяет следующим краевым условиям:

$$\sum_{\tau=0}^{n-1}[\widetilde{\alpha}_{\tau p} D^\tau Ty(0) + \widetilde{\beta}_{\tau p} D^\tau Ty(1)] = (y, \varphi_p), \qquad p = 1,\dots,n, \tag{4}$$

где

$$\widetilde{\alpha}_{\tau p} = \begin{cases} b_{\tau p}(0) + \sum\limits_{\mu=1}^{s} \delta_{\tau, i_\mu} a_{\mu p}, & p = 1,\dots,s, \\ \delta_{\tau i_p} + b_{\tau p}(0) + \sum\limits_{\mu=1}^{s} \delta_{\tau, i_\mu} a_{\mu p} & p = s+1,\dots,n, \end{cases}$$

$$\widetilde{\beta}_{\tau p} = -b_{\tau p}(1), \qquad \varphi_p(t) = Tb_{-1p}(t),$$

$$a_{\mu p} = \begin{cases} -\dfrac{1}{\Delta}\sum\limits_{k=1}^{m}[\beta\delta_{kj_p} + (D^n Tg_k, v_{j_p})]\Delta_{\mu k}, & p = 1,\dots,s, \\ -\dfrac{1}{\Delta}\sum\limits_{k=1}^{m} D^{i_p}Tg_k(0)\Delta_{\mu k}, & p = s,\dots,n, \end{cases}$$

$$b_{\tau p}(x) = \begin{cases} (-1)^{n-\tau}\left[ v_{j_p}^{(n-1-\tau)}(x) + \sum\limits_{\mu=s+1}^{m} a_{\mu p} v_{j_\mu}^{(n-1-\tau)}(x) \right], & p = 1,\dots,s, \\ (-1)^{n-\tau} \sum\limits_{\mu=s+1}^{m} a_{\mu p} v_{j_\mu}^{(n-1-\tau)}(x), & p = s,\dots,n, \end{cases}$$

$\Delta_{\mu k}$ - алгебраические дополнения элементов определителя $\Delta$, $\delta_{i,j}$ - символ Кронекера.

Доказательство. Пусть $y = Af$. Тогда

$$D^n Ty(x) = \beta f(x) + \sum_{k=1}^{m} (f, v_k) D^n T g_k(x), \tag{5}$$

$$D^i Ty(0) = \sum_{k=1}^{m} (f, v_k) D^i T g_k(0), \quad i = 0, \ldots, n-1. \tag{6}$$

Найдем $(f, v_k)$, $k = 1, \ldots, m$. Умножая (5) скалярно на $v_j$, $j = 1, \ldots, m$, получим

$$(D^n Ty, v_j) = \beta (f, v_j) + \sum_{k=1}^{m} (f, v_k)(D^n T g_k, v_j), \quad j = 1, \ldots, m. \tag{7}$$

Возьмем $i_\mu$, $\mu = 1, \ldots, s$ соотношения из (6) и добавим к ним $j_\mu$, $\mu = s+1, \ldots, m$ соотношения из (7). Определитель этой системы есть $\Delta \neq 0$. Поэтому по формулам Крамера

$$(f, v_k) = \frac{1}{\Delta} \left[ \sum_{\mu=1}^{s} \Delta_{\mu k} D^{i_\mu} Ty(0) + \sum_{\mu=s+1}^{m} \Delta_{\mu k} (D^n Ty, v_{j_\mu}) \right], \; k = 1, \ldots, m. \tag{8}$$

Подставляя (8) в (5), придем к (3).

Подставляя (8) в оставшиеся $j_\mu$, $\mu = 1, \ldots, s$ соотношения из (7) и $i_\mu$, $\mu = s+1, \ldots, m$ соотношения из (6) и интегрируя по частям, получим (4).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Хромов А. П.* Теоремы равносходимости для интегродифференциальных и интегральных операторов // Матем. сборник. 1981. Т. 114(156), № 3. С. 378 - 405.

2. *Хромов А. П.* О равносходимости разложений по собственным функциям конечномерных возмущений оператора интегрирования // Вестн. МГУ. Сер. Математика, механика. 2000. № 2. С. 21 - 26.

УДК 518:517.948

**Г. В. Хромова**

# ОБ УРАВНЕНИИ АБЕЛЯ*

В данной статье на уравнении Абеля демонстрируется новый способ регуляризации уравнений первого рода, базирующийся на привлечении операторов из теории приближения функций.

---

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты №№ 00-01-00237, 00-15-96123.