3. *Молоденкова И. Д.* Об осредняющих операторах, сохраняющих тригонометрические многочлены и тригонометрические сплайны // Математика, механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2000. С. 81 – 84.

4. *Молоденкова И. Д., Молоденков В. А.* Обзор численных методов для решения задач приближения непрерывных функций с использованием сплайнов и осредняющих операторов. Саратов, 1998. 37 с. Деп. в ВИНИТИ. № 986-В98.

УДК 519.853.5

**В. Б. Чеглов**

# О ВНЕШНЕЙ ОЦЕНКЕ КОМПАКТА ОРИЕНТИРОВАННЫМ ЭЛЛИПСОИДОМ

**1. Математическая формализация задачи.** Пусть множество $D \subset R^p$ - компакт, подлежащий оценке. Рассмотрим задачу о построении ориентированного эллипсоида наименьшего объема, содержащего в себе $D$. Для определенности будем считать, что эллипсоид ориентирован по осям координат.

Введем следующие обозначения:

$$n(x,\tau) = \sqrt{\sum_{i=1}^{p}\left(\frac{x^{(i)}}{\tau^{(i)}}\right)^2}, \quad r(x,\tau) = \max_{y\in D} n(x-y,\tau). \tag{1}$$

Заметим, что при фиксированном векторе $\tau = \left(\tau^{(1)},\tau^{(2)},\ldots,\tau^{(p)}\right)$, $\tau^{(i)} > 0$, $i = \overline{1,p}$ функция $n(x,\tau)$ удовлетворяет аксиомам нормы.

Множество, заданное соотношением

$$E(x,r(x,\tau)\tau) \equiv \left\{ y \in R^p \,/ \sum_{i=1}^{p}\frac{\left(x^{(i)}-y^{(i)}\right)^2}{\left(\tau^{(i)}\right)^2} \le r^2(x,\tau)\right\}, \tag{2}$$

является ориентированным эллипсоидом с центром в точке $x$, размеры полуосей которого заданы вектором $r(x,\tau)\tau$, причем (это следует из (1) и (2)) хотя бы одна точка компакта $D$ лежит на границе эллипсоида.

Известно, что объем эллипсоида пропорционален произведению длин его полуосей (см., например, [1]). Тогда задачу о внешней оценке компакта $D$ ориентированным эллипсоидом можно записать в виде

$$V(x,\tau) \equiv r^p(x,\tau)\prod_{i=1}^{p}\tau^{(i)} \to \min_{x\in R^p,\,\tau>0}. \tag{3}$$

**2. Дифференциальные свойства целевой функции.** Напомним основные понятия квазидифференциального исчисления (см. [2]).

Определение 1. Пусть в открытом множестве $S \subset R^p$ задана конечная функция $f(x)$. Будем считать, что $f(x)$ - квазидифференцируемая функция в точке $x_0 \in S$, если она дифференцируема в точке $x_0$ по любому направлению $g \in R^p$ и существуют выпуклые компакты $\underline{\partial} f(x_0) \subset R^p$ и $\overline{\partial} f(x_0) \subset R^p$ такие, что производная функции $f(x)$ в точке $x_0$ по направлению $g$ имеет вид

$$f'(x_0, g) \equiv \lim_{\alpha \downarrow 0} \alpha^{-1}[f(x_0 + \alpha g) - f(x_0)] = \max_{v \in \underline{\partial} f(x_0)} < v, g > + \min_{w \in \overline{\partial} f(x_0)} < w, g > .$$

Множества $\underline{\partial} f(x)$ и $\overline{\partial} f(x)$ называются соответственно суб- и супердифференциалами функции $f(x)$ в точке $x_0$, а $\partial f(x) = [\underline{\partial} f(x), \overline{\partial} f(x)]$ - квазидифференциалом.

Определение 2. Если среди квазидифференциалов функции $f(x)$ в точке $x_0$ есть элемент вида $\partial f(x_0) = [\underline{\partial} f(x_0), \{0_p\}]$, то $f(x)$ - субдифференцируема.

Теперь докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 1. Функция $V(z)$ субдифференцируема в любой точке $z = (x, \tau)$ для $x, \tau \in R^p$, $\tau^{(i)} > 0, i = \overline{1, p}$, причем

$$\underline{\partial} \mathrm{V}(\mathrm{z}) = co\{ pr^{p-1}(z) f(z) n'(x-y, \tau) / \, y \in Q^r(z)\} + r^P(z) f'(z), \qquad (4)$$

где $Q^r(z) = \{y \in D / r(z) = n(x-y, \tau)\}$, $f(z) = \prod_{i=1}^{p} \tau^{(i)}$, а $f'(z)$ - градиент функции $f(z)$ в точке $z$, $coA$ - выпуклая оболочка множества $A$.

Доказательство. Поскольку $n(x, \tau)$ - гладкая по совокупности переменных $(x, \tau)$, то $r(x, \tau)$ - дифференцируема по любому направлению (см. [2]), причем в любой точке $z = (x, \tau)$ для направления $g \in R^{2p}$ имеет место формула

$$r'(z, g) = \max_{y \in Q^r(z)} < n'(x-y, \tau), g > , \qquad (5)$$

где $Q^r(z) = \{y \in D / r(z) = n(x-y, \tau)\}$.

Теперь из (5) получаем

$$r'(z, g) = \max_{v \in \{n'(x-y, \tau) / \, y \in Q^r(z)\}} < v, g > = \max_{v \in co\{n'(x-y, \tau) / \, y \in Q^r(z)\}} < v, g > . \qquad (6)$$

Тогда и функция $r^p(z)$ дифференцируема по направлениям, причем

$$\left(r^p(\cdot)\right)'(z, g) = pr^{p-1}(z) r'(z, g). \qquad (7)$$

Подставляя (6) в (7), получаем

$$\left(r^p(\cdot)\right)'(z, g) = pr^{p-1}(z) r'(z, g) = pr^{p-1}(z) \cdot \max_{v \in co\{n'(x-y, \tau) / \, y \in Q^r(z)\}} < v, g > =$$

$$= \max_{v \in co\{n'(x-y,\tau)/\, y \in Q^r(z)\}} < pr^{p-1}(z)v, g > \; = \max_{v \in co\{ pr^{p-1}(z)n'(x-y,\tau)/\, y \in Q^r(z)\}} < v, g > . \qquad (8)$$

Обозначим $f(z)=\prod_{i=1}^{p}\tau^{(i)}$. Эта функция дифференцируема по $z$, причем

$$f'(z)=\left(0,\dots,0,\frac{f(z)}{\tau^{(1)}},\dots,\frac{f(z)}{\tau^{(p)}}\right). \qquad (9)$$

Теперь, используя (3), (8) и (9), имеем

$$V'(z,g)=r^p(z)f'(z,g)+\left(r^p(\cdot)\right)'(z,g)f(z)=$$

$$=r^p(z)f'(z,g)+f(z)\max_{v \in co\{ pr^{p-1}(z)n'(x-y,\tau)/\, y \in Q^r(z)\}} < v, g > =$$

$$=r^p(z)f'(z,g)+\max_{v \in co\{ pr^{p-1}(z)f(z)n'(x-y,\tau)/\, y \in Q^r(z)\}} < v, g > =$$

$$= \max_{v \in co\{ pr^{p-1}(z)f(z)n'(x-y,\tau)/\, y \in Q^r(z)\}+r^p(z)f'(z)} < v, g > , \forall g \in R^p .$$

Что, в соответствии с определением 2, и требовалось доказать.

Теперь, используя известный факт из негладкого анализа [2], получаем

*Следствие.* Для того чтобы точка $z_0=(x_0,\tau_0)$ была решением задачи (3) необходимо, чтобы $0_{2p} \in \underline{\partial V}(z_0)$, где множество $\underline{\partial V}(z)$ определено формулой (4).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Черноусько Ф. Л.* Оценивание фазового состояния динамических систем. Метод эллипсоидов. М.: Наука, 1998.

2. *Демьянов В. Ф., Васильев Л. В.* Недифференцируемая оптимизация. М.: Наука, 1981.



УДК 631.86



**В. Т. Челышев**


# ЖЕСТКОСТЬ ГЕКСАПОДА


Для одной шарнирно-стержневой конструкции найдено инвариантно-геометрическое условие приобретения степени свободы в исключительном случае.

The invariant-geometric condition of a freedom degree acquisition in an exclusive case is found for one joint-rod construction