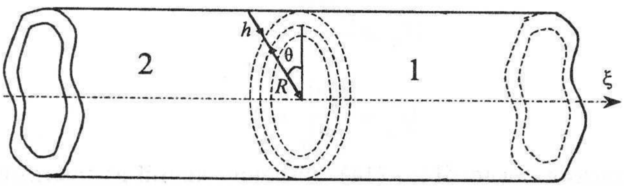
УДК 539.3

М. В. Вильде

СВОБОДНЫЕ ИНТЕРФЕЙСНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПРОДОЛЬНО-НЕОДНОРОДНОЙ КРУГОВОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Данная статья посвящена обобщению результатов работы [1], в которой рассматривались локализованные около торца свободные колебания полубесконечной цилиндрической оболочки, на случай бесконечной продольно-неоднородной оболочки. Собственные формы колебаний такой оболочки характеризуются локализацией около линии раздела свойств материала, что и обусловливает применение термина «интерфейсные колебания».

Рассмотрим собственные колебания продольно-неоднородной бесконечной круговой цилиндрической оболочки, составленной из двух однородных полубесконечных оболочек с различными свойствами материала. Срединную поверхность оболочки отнесем к координатам ξ и θ, таким, что ее первая квадратичная форма имеет вид $R^2\left(d\xi^2 + d\theta^2\right)$, ξ $(-\infty < \xi < \infty)$ – координата по образующей, θ $(0 \le \theta < 2\pi)$ – окружная координата, R – радиус оболочки, параллель $\xi = 0$ соответствует границе раздела свойств материала (см. рисунок).



Будем отмечать индексом «1» величины, относящиеся к правой оболочке $(0 \le \xi < \infty)$, индексом «2» – величины, относящиеся к левой оболочке $(-\infty < \xi \le 0)$. В частности, свойства материала характеризуются модулями Юнга $E^{(k)}$, коэффициентами Пуассона $\nu^{(k)}$, плотностями $\rho^{(k)}$ $(k = 1,2)$. Введем в рассмотрение безразмерные константы $\gamma^{(k)} = E^{(1)}/E^{(k)}$ и $q^{(k)} = E^{(1)}\rho^{(k)}/E^{(k)}\rho^{(1)}$. Для описания колебаний оболочки будем применять теорию Кирхгофа–Лява. Записывая уравнения этой теории в перемещениях и отделяя окружную переменную θ, мы получим однородную краевую задачу для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. При $\xi = 0$ ставятся условия полного контакта, на бесконечности – условия затухания либо условия излучения. Для поставленной задачи можно построить точное частотное уравнение, но из-за громоздкости оно мало пригодно для исследования.

Применим асимптотические методы, связанные с наличием в задаче малого параметра тонкостенности $\eta = h/R$. Представим число волн в окружном направлении n и безразмерный частотный параметр $\lambda = \rho^{(1)}\omega^2 R^2 / E^{(1)}$ как степени малого параметра η:

$$n = \eta^{-q}, \quad \lambda = \eta^{-2a}, \tag{1}$$

где величины q и a называются показателем изменяемости и показателем динамичности соответственно. Используя результаты работы [1], мы выделяем три типа рассматриваемых колебаний:

1) *изгибные колебания* $(a = 2q - 1,\ 1/2 \le q < 1)$,

2) *сверхнизкочастотные колебания* $(a = 2q - 1,\ 0 \le q < 1/2)$,

3) *тангенциальные колебания* $(a = q,\ q \ge 0)$.

Далее для каждого из этих трех типов колебаний строится процесс асимптотического упрощения уравнений теории Кирхгофа–Лява.

Для изгибных колебаний этот процесс приводит к уравнению теории Кирхгофа изгиба пластин, и в первом приближении частота может быть определена из краевой задачи, формально совпадающей с задачей об изгибных свободных интерфейсных колебаниях продольно-неоднородной пластины-полосы с перекрестными граничными условиями на боковых сторонах. Собственная форма последних представляет собой стоячую изгибную волну типа Стоунли [2]. Приближенное частотное уравнение может быть сведено к дисперсионному уравнению для изгибной волны типа Стоунли, условия существования решения которого изучены в работе [2]. В таблице найденные из приближенного частотного уравнения асимптотические оценки Λ_1^{as} сопоставляются с точными собственными значениями Λ_1^{ex}. В последнем столбце приведена относительная погрешность Λ_1^{as} по отношению к Λ_1^{ex}: $\varepsilon = \left|\Lambda_1^{as} - \Lambda_1^{ex}\right| \cdot 100\% / \Lambda_1^{ex}$.

n	Λ_1^{ex}	Λ_1^{as}	ε
26	17.991575	18.073925	0.458
27	20.930051	21.019101	0.425
28	24.214313	24.310350	0.397

Параметры задачи: $h = 0.01$, $R = 1$, $\nu^{(1)} = 0.4$, $\nu^{(2)} = 0.3$, $E^{(1)}/E^{(2)} = 6$, $\rho^{(1)}/\rho^{(2)} = 6.5$.

Для сверхнизкочастотных колебаний, которые существуют, только если $q^{(1)}\nu_2^{(1)} = q^{(2)}\nu_2^{(2)}$ $(\nu_2^{(k)} = 1 - (\nu^{(k)})^2)$, асимптотическая оценка собственной частоты имеет вид

$$\Lambda_1^{as} = \frac{\eta^2}{3\nu_2^{(1)}q^{(1)}}\frac{n^2\left(n^2-1\right)^2}{n^2+1}\left(1-\left(2D^2\right)^{\frac{4}{3}}\left(\frac{\eta^2}{3\nu_2^{(1)}q^{(1)}}n^2\left(n^2-1\right)\right)^{\frac{2}{3}}\right), \qquad (2)$$

где $D = \dfrac{\left(\gamma^{(1)}q^{(2)}\nu^{(2)}-\gamma^{(2)}q^{(1)}\nu^{(1)}\right)\left(\left(q^{(1)}\right)^{\frac{1}{4}}\gamma^{(2)}+\left(q^{(2)}\right)^{\frac{1}{4}}\gamma^{(1)}\right)}{\left(\left(q^{(1)}\right)^{\frac{1}{2}}\gamma^{(2)}+\left(q^{(2)}\right)^{\frac{1}{2}}\gamma^{(1)}\right)^2+2\left(q^{(1)}q^{(2)}\right)^{\frac{1}{4}}\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}\left(\left(q^{(1)}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(q^{(2)}\right)^{\frac{1}{2}}\right)}.$

Для тангенциальных колебаний процесс асимптотического упрощения уравнений теории Кирхгофа–Лява приводит к уравнениям планарных колебаний пластинки. Частота в первом приближении может быть определена из краевой задачи, формально совпадающей с задачей о планарных свободных интерфейсных колебаниях продольно-неоднородной пластины-полосы с перекрестными граничными условиями на боковых сторонах, которые связаны с планарной волной типа Стоунли, являющейся обобщением классической волны Стоунли [3] на случай обобщенного плоского напряженного состояния. Собственные частоты тангенциальных интерфейсных колебаний оболочки имеют малую мнимую часть ($\mathrm{Im}\,\Lambda_2 \sim \eta^{1/2+3q/2}\,\mathrm{Re}\,\Lambda_2$), появление которой связано с существованием изгибной распространяющейся волны, вносящей в систему радиационное демпфирование. Оценка этой мнимой поправки может быть получена с помощью процедуры, аналогичной описанной в [1].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kaplunov J. D., Kossovich L. Yu., Wildê M. V.* Free localized vibrations of a semi-infinite cylindrical shell // J. Acoust. Soc. Am. 2000. Vol. 107. № 3. P. 1383 - 1393.

2. *Зильберглейт А. С., Суслова И. Б.* Контактные волны изгиба в тонких пластинках // Акуст. журн. 1983. Т. 29. С. 186-191.

3. *Stoneley R.* The elastic waves at the interface of separation of two solids // Proc. Roy. Soc. Lond. A. 1924. Vol. 106. № 732. P. 416 - 429.