УДК 539.3+350.34.013

В. В. Гурьянов, В. М. Гурьянов

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ НА ОСНОВЕ УСРЕДНЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА

Предлагается численный метод, основанный на усреднении волнового уравнения по пространственным переменным и покрытии его открытой связной области определения $\boldsymbol{D}$ областями C_i $(i=1,2..n)$. Граница $\boldsymbol{S}$ области $\boldsymbol{D}$ - кусочно-гладкая. Для областей C_i формируется система обыкновенных дифференциальных уравнений.

В трехмерном вещественном пространстве (R^3) введём декартову систему координат $\{x,y,z\}$ и регулярную сетку узлов $\{x_i,y_j,z_k\}$ $(i,j,k=0,\pm1,\pm2,...)$ с постоянным шагом $h>0$ такую, что $\xi_{i+1}=\xi_i+h,\ (\xi=x,y,z)$.

Отнесем к введенной системе координат область $\boldsymbol{D}$.

В качестве C_i возьмем куб $(C_{x,y,z})$ с центром в точке (x,y,z) и ребром длиной $2H=2nh$ с n - положительным целым числом. Ребра куба параллельны осям координат. Назовем $C_{x,y,z}$ основным элементом покрытия. Если $C_{x,y,z}\cap\boldsymbol{S}=\varnothing$ и $(x,y,z)\in\boldsymbol{D}$, то такой основной элемент будем называть внутренним и обозначать $D_{x,y,z}$. Если $C_{x,y,z}\cap\boldsymbol{S}\neq\varnothing$ и $(x,y,z)\in\boldsymbol{D}$, то такой основной элемент будем называть граничным и обозначать $S_{x,y,z}$. Таким образом, $S_{x,y,z}=C_{x,y,z}\cap(\boldsymbol{S}\cup\boldsymbol{D})$.

На введенных элементах определим среднее значение $F(x,y,z)$ некоторой функции $f(x,y,z)$ формулой $F(x,y,z)=\frac{1}{|G|}\int\limits_G f(x,y,z)d\Omega$, в которой $|G|$ - объем области G $(G=D_{x,y,z},S_{x,y,z})$.

Все регулярные узлы сетки (x_i,y_j,z_k), расположенные внутри области $\boldsymbol{D}$, будем считать центрами основных элементов C_{x_i,y_j,z_k}. Тогда из внутренних и граничных элементов образуется покрытие замыкания области $\boldsymbol{D}$, которое обозначим $\Pi_{H,n}$. Таким образом, $\Pi_{H,n}=D_{x_i,y_j,z_k}\cup S_{x_i,y_j,z_k}$. Такое покрытие освобождает от ручной работы по введению локальной системы координат в окрестности сложной геометрии границ, стыковок областей усреднения и т. п., как это делается в [1].

От волнового уравнения

$$u_{tt} - c^2(u_{xx} + u_{yy}) = 0, \qquad (1)$$

где $c = \text{const}$, перейдем к системе уравнений первого порядка, введя переменные $v = u_t$, $\bar{p} = c\nabla u = p_1\bar{i} + p_2\bar{j}$. Здесь $\bar{i}, \bar{j}$ - орты системы координат $x0y$. Систему уравнений для $v, \bar{p}$ запишем в окрестности узлов (x_i, y_j) покрытия $\Pi_{H,n}$:

$$\frac{\partial v}{\partial t} - c\nabla \cdot \bar{p} = 0, \quad \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} - c\nabla v = 0. \qquad (2)$$

Усредним правые и левые части уравнений (2) в соответствии с формулами усреднения покрытия $\Pi_{H,n}$. Используя теорему Остроградского-Гаусса, будем иметь

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{|G|}\int_G v(x,y,t)d\Omega - \frac{c}{|G|}\int_G \nabla \cdot \bar{p}d\Omega = \frac{d}{dt}\frac{1}{|G|}\int_G vd\Omega - \frac{c}{|G|}\int_{\partial G}\bar{n}\cdot\bar{p}dg = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{|G|}\int_G \bar{p}(x,y,t)d\Omega - \frac{c}{|G|}\int_G \nabla vd\Omega = \frac{d}{dt}\frac{1}{|G|}\int_G \bar{p}d\Omega - \frac{c}{|G|}\int_{\partial G}\bar{n}vdg = 0.\end{gathered} \qquad (3)$$

Учитывая, что в результате операции усреднения интегралы в (3) превращаются в функции времени (t), будем иметь систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned}\frac{d}{dt}\frac{1}{|G_{i,j}|}\int_{G_{i,j}} vd\Omega &= \frac{c}{|G_{i,j}|}\int_{\partial G_{i,j}}\bar{n}\cdot\bar{p}dg \\ \frac{d}{dt}\frac{1}{|G_{i,j}|}\bar{p}d\Omega &= \frac{c}{|G_{i,j}|}\int_{\partial G_{i,j}}\bar{n}vdg\end{aligned}\right\}\forall(x_i, y_j) \in D. \qquad (4)$$

Рассмотрим решение задачи Коши для уравнения (2) предложенным методом. Будем считать, что данные Коши

$$\bar{p}(x,y,t_0) = \bar{p}_0(x,y), \quad v(x,y,t_0) = v_0(x,y) \qquad (5)$$

- финитные непрерывные функции, носителем которых является область $\boldsymbol{D}$. Вне этой области и на ее границе $\bar{p}_0(x,y) = v_0(x,y) \equiv 0 \quad \forall(x,y) \notin \boldsymbol{D}$.

Для расчетов выберем в покрытии $\Pi_{H,n}$ области $\boldsymbol{D}$ прямоугольник Q, стороны которого параллельны координатным осям, проходят через узлы регулярной сетки покрытия $\Pi_{H,n}$ и удалены от соответствующего отрезка границы $\boldsymbol{S}$ на расстояние $d >> cT + H$ (c - скорость распространения волны, T - максимальное расчетное время изучаемого интервала времени распространения волн). Все элементы покрытия Q в рассматриваемом случае внутренние, и уравнения (4) приобретают вид нормированных интегральных законов сохранения

$$\frac{d}{dt}V_{i,j} = \frac{d}{dt}\frac{1}{4H^2}\int\limits_{x_i-H}^{x_i+H}\int\limits_{y_j-H}^{y_j+H} v\,dxdy = \frac{c}{4H^2}\times$$

$$\times\left[\int\limits_{x_i-H}^{x_i+H}(p_2(x,y_j+H)-p_2(x,y_j-H))dx + \int\limits_{y_j-H}^{y_j+H}(p_1(x_i+H,y)-p_1(x_i-H,y))dy\right]$$

$$\forall(x_i,y_j)\in Q \qquad (6)$$

$$\frac{d}{dt}\overline{P}_{i,j} = \frac{d}{dt}\frac{1}{4H^2}\int\limits_{x_i-H}^{x_i+H}\int\limits_{y_j-H}^{y_j+H} \overline{p}dxdy = \frac{c}{4H^2}\times$$

$$\times\left[\bar{j}\cdot\int\limits_{x_i-H}^{x_i+H}(v(x,y_j+H)-v(x,y_j-H))dx + \bar{i}\cdot\int\limits_{y_j-H}^{y_j+H}(v(x_i+H,y)-v(x_i-H,y))dy\right]$$

Равенства (6), как законы сохранения, являются точными. В них отсутствуют производные по переменным x, y. Приближение заключается в том, что в дальнейшем интегралы заменяются численными квадратурами по значениям подынтегральных функций в узлах регулярной сетки покрытия $\Pi_{H,n}$ и не делается различия между средними значениями $V_{i,j}, \overline{P}_{i,j}$ и усредняемым значениями $v_{i,j}, \overline{p}_{i,j}$.

Решение задачи Коши для системы обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\frac{dy}{dt} = Ay,\ y(t_0) = y_0, \qquad (7)$$

где $y = y(t)$ - n-мерный вектор, A - матрица $n \times n$, осуществим по схеме эквивалентной схеме метода итераций Пикара и дающей тот же самый результат. Схема имеет вид

$$y_{л+1} = y_0 + \frac{t-t_0}{s-k}Ay_k,\ (k = 0,1,...s-1). \qquad (8)$$

Решение получается в виде ряда $y \approx y_s = y_0 + \sum\limits_{k=1}^{s}\frac{(t-t_0)^k}{k!}A^k y_0$.

Получение решения системы (7) ведется по шагам $l = t_k - t_{k-1} = t - t_0$ $(k = 1,2,...)$, как обычно. Необходимо соблюдать условие $c(t-t_0)/H \le 1$ [1]. Параметр s берется обычно равным 4. После получения решения на нескольких шагах продолжать его можно, используя многошаговые методы, например, Адамса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Численное решение многомерных задач газовой динамики / Под ред. С. К. Годунова. М.: Наука, 1976.