

ИЗГИБ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ПЛИТЫ

Методом комплексных потенциалов С. Г. Лехницкого решается задача изгиба кусочно-однородной плиты, состоящей из трех ($\nu = 1, 2, 3$) склеенных друг в друга без натяга эллиптических колец, изготовленных из разных анизотропных материалов.

Плита находится под действием изгибающих моментов интенсивности m , равномерно распределенных по ее внешнему краю, а внутренний край - свободен от внешней нагрузки.

Обозначим внешний контур ν -го кольца $L_0^{(\nu)}$, внешний - $L_1^{(\nu)}$, полуоси внешнего контура ν -го кольца $a_0^{(\nu)}, b_0^{(\nu)} = c_0^{(\nu)} a_0^{(\nu)}$, внутреннего контура - $a_1^{(\nu)}, b_1^{(\nu)} = c_1^{(\nu)} a_1^{(\nu)}$.

Задача об изгибе такой плиты приводится к отысканию комплексных потенциалов $w_j^{(\nu)}(z_j^{(\nu)})$ [1] из граничных и контактных условий [2]:

$$2 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^2 a_{jn}^{(\nu)} w_j^{(\nu)}(t_j^{(\nu)}) = f_n^{(\nu)} \quad (\nu = 1, 3; \quad n = 1, 2), \quad (1)$$

где $a_{j1}^{(1)} = p_j^{(1)} / \mu_j^{(1)}$, $a_{j2}^{(1)} = q_j^{(1)}$, $f_1^{(1)} = -my$, $f_2^{(1)} = -mx$ на $L_0^{(1)}$;

$$a_{j1}^{(3)} = 1, \quad a_{j2}^{(3)} = \mu_j^{(3)}, \quad f_1^{(3)} = 0, \quad f_2^{(3)} = 0 \quad \text{на } L_1^{(3)}.$$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^2 [\beta_{jn}^{(\nu)} w_j^{(\nu)}(t_j^{(\nu)}) - \beta_{jn}^{(\nu+1)} w_j^{(\nu+1)}(t_j^{(\nu+1)})] = 0 \quad (\nu = 1, 2; \quad n = \overline{1, 4}), \quad (2)$$

где $\beta_{j1}^{(s)} = 1$, $\beta_{j2}^{(s)} = \mu_j^{(s)}$, $\beta_{j3}^{(s)} = q_j^{(s)}$, $\beta_{j4}^{(s)} = p_j^{(s)} / \mu_j^{(s)}$ ($s = \overline{1, 3}$) на $L_1^{(\nu)} | L_0^{(\nu+1)}$.

Здесь применены такие же обозначения, как и в работе [2].

После определения функций $w_j^{(\nu)}(z_j^{(\nu)})$ прогиб, моменты и перерезывающие силы определяются по известным формулам [1].

Искомые функции представим в виде [2]

$$w_j^{(\nu)}(z_j^{(\nu)}) = \sum_{k=1,3}^{\infty} A_{jk}^{(\nu)} [\zeta_{s1}^{(\nu)}(z_j^{(\nu)})]^{-k} + \sum_{k=1,3}^{\infty} C_{jk}^{(\nu)} P_{k0}^{(\nu)}(z_j^{(\nu)}), \quad (3)$$

где $A_{jk}^{(\nu)}, C_{jk}^{(\nu)}$ - искомые постоянные, определяемые из условий (1), (2);

$P_{k0}^{(\nu)}(z_j^{(\nu)})$ - полиномы Фабера в преобразованных плоскостях;

$\zeta_{s1}^{(\nu)}(z_j^{(\nu)})$ - величины, связанные с $z_j^{(\nu)}$ неявными зависимостями вида [2]

$$z_j^{(v)} = R_{js}^{(v)} \left(\zeta_s^{(v)} + m_{js}^{(v)} / \zeta_s^{(v)} \right) \quad (s = 0, 1),$$

здесь $R_{js}^{(v)}, m_{js}^{(v)}$ - постоянные, характеризующие геометрию соответствующих эллипсов в преобразованных плоскостях [2].

Неизвестные коэффициенты $A_{jk}^{(v)}, C_{jk}^{(v)}$ определяются из бесконечной системы линейных алгебраических уравнений, которую можно получить методом, изложенным в работе [3].

При приближенном решении задачи эта система урезалась, что можно сделать в силу ее квазирегулярности [3]. Максимальное количество уравнений в системе было равно 72, что соответствует $k \leq 9$.

Численные расчеты были проведены для случая, когда в качестве материалов колец выбирались те же материалы, что и в работе [2].

В таблице показаны сочетания материалов, из которых изготовлены кольца.

№	Внешнее кольцо	Среднее кольцо	Внутреннее кольцо
I	СВАМ	$\lambda^{(2)} = D_i^{(2)} / D_i^{(1)} = 2$	$\lambda^{(3)} = D_i^{(3)} / D_i^{(1)} = 3$
II	СВАМ	$\lambda^{(2)} = 0.5$	$\lambda^{(3)} = 0.25$
III	Фанера	$\lambda^{(2)} = 2$	$\lambda^{(3)} = 3$
IV	Фанера	$\lambda^{(2)} = 0.5$	$\lambda^{(3)} = 0.25$
V	СВАМ	Фанера	СВАМ
VI	Фанера	СВАМ	Фанера

На рис. 1. показано распределение изгибающего момента $M_\theta^{(3)}$ вдоль контура $L_1^{(3)}$ в эллиптической плите ($a_0^{(1)} = 5, a_0^{(2)} = 3, a_0^{(3)} = 1, a_1^{(3)} = 0.5, c_0^{(1)} = 0.7, c_0^{(2)} = 0.6, c_0^{(3)} = 0.7, c_1^{(3)} = 0.6$) для случая III и для сравнения - $M_\theta^{(1)}$ вдоль контура спая $L_1^{(1)}$ в такой же плите для случая II. На рис. 2 дано распределение изгибающих моментов $M_\theta^{(v)}$, возникающих в каждом из эллиптических колец вдоль контуров $L_1^{(v)}$ при $v = \overline{1, 3}$ для случая VI.

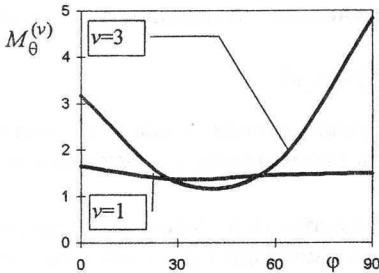


Рис. 1

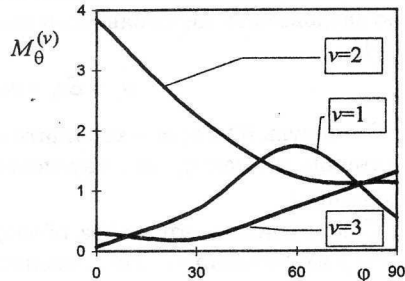


Рис. 2

Полученные результаты позволяют сделать следующие выводы.

Прогиб достигает наибольшего значения в точках внешнего контура $L_0^{(1)}$, а максимальный изгибающий момент может возникнуть как на внутреннем краю, так и на любом контуре спая. Так, для просчитанных нами вариантов, в случаях II и V максимальным оказался изгибающий момент $M_\theta^{(1)}$ на контуре спая $L_1^{(1)}$; в случаях I, III, IV - изгибающий момент $M_\theta^{(3)}$ на внутреннем контуре $L_1^{(3)}$. Величина же его зависит кроме этого и от ширины составляющих колец. Так, например, в круглой плите ($a_0^{(1)} = 5$, $a_0^{(2)} = 3$, $a_0^{(3)} = 1$, $a_1^{(3)} = 0.25$) для случая V - $M_{\max} = 2.56 \cdot m$, если же в этой плите уменьшить $a_0^{(1)}$ до 4, то $M_{\max} = 3.39 \cdot m$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки. М.: Гостехиздат, 1957.
2. Копнина В. И. Чистый изгиб составной анизотропной плиты // Механика деформируемых сред. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1985. Вып. 9. С. 45 - 53.
3. Копнина В. И., Мезлинский В. В. Квазирегулярность бесконечной системы в задаче об изгибе составной анизотропной плиты // Механика деформируемых сред. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1974. Вып. 1. С. 57 - 64.

УДК 539.3:534:532.5

Л. И. Могилевич

НЕЛИНЕЙНЫЕ ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ ПРОДОЛЬНЫЕ ВОЛНЫ В НЕОДНОРОДНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ

Рассмотрим цилиндрическую оболочку для модели Кирхгофа-Лява, усиленную в двух направлениях взаимно перпендикулярными ребрами, расположенными симметрично по обе стороны срединной поверхности. Считая материал обшивки нелинейно упругим, примем для него кубическую зависимость интенсивности напряжений от интенсивности деформаций [1]

$$\sigma_i = Ee_i - me_i^3 \quad (i = x, y), \quad (1)$$

где E - модуль Юнга; m - константа материала, определяемая из опытов на растяжение и сжатие; σ_i - интенсивность напряжений; e_i - интенсивность деформаций.

Будем считать, что ребра обладают жесткостью только в отношении изгиба в их плоскостях. Это позволяет в соответствии с методом конструктивной анизотропии записать формулы, связывающие моменты с деформациями, в виде