УДК 519.23

Е. Л. Александров, В. А. Кутепов

МАТРИЧНЫЕ СПЕКТРАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ СИММЕТРИЧНЫХ ОПЕРАТОРОВ С РАВНЫМИ КОНЕЧНЫМИ ДЕФЕКТНЫМИ ЧИСЛАМИ

1. Нахождение в явном виде спектральных функций симметричных или самосопряженных операторов, действующих в сепарабельном гильбертовом пространстве H, является важной и часто трудной задачей.

Такие проблемы появляются в квантовой механике, в теории случайных процессов, в квантовых стохастических уравнениях и т.д. Например, в квантовой механике наблюдаемая есть некоторый самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве M состояний квантомеханической системы. В отличие от классической механики, наблюдаемая в состоянии $\varphi \in M$ принимает не фиксированное значение, а является случайной величиной с функцией распределения вероятностей $F(t) = (E_t\varphi, \varphi)$, где E_t – спектральная функция оператора A. Средним значением наблюдаемой в состоянии φ будет $(A\varphi, \varphi)$.

В статье мы получаем формулу, описывающую все обобщенные спектральные функции симметричного оператора A, действующего в H с дефектными числами (n, n), $n < \infty$.

2. В дальнейшем предполагается, что A – плотно заданный с индексами дефекта (n, n).

Введем следующие обозначения: $\varphi_1(\lambda), \ldots, \varphi_n(\lambda)$ – базис дефектного подпространства $\aleph_\lambda$ оператора A, $\overset{\circ}{A}$ – его фиксированное самосопряженное расширение, $\overset{\circ}{U}_{\lambda\lambda_0} = (A - \lambda_0 I)(\overset{\circ}{A} - \lambda I)^{-1}|_{\aleph_{\lambda_0}}$, $\overset{\circ}{U} = \overset{\circ}{U}_{i,-i}$,

$$\mathrm{X}(\lambda) = \frac{\lambda - i}{\lambda + i}\{P_{\aleph_i}, \overset{\circ}{U}_{\lambda,-i}\}\{\overset{\circ}{U}, \overset{\circ}{U}_{\lambda,-i}\}^{-1}, \quad \omega(\lambda) = \overset{\circ}{U}{}^{*} F(\lambda),$$

где $F(\lambda)$ – произвольная регулярная в верхней полуплоскости функция,

значения которой линейные нерастягивающие операторы из $\aleph_i$ в $\aleph_{-i}$, $P_{\aleph_i}$ – ортопроектор на дефектное подпространство $\aleph_i$.
Здесь $\{\cdot,\cdot\}$ означает псевдоскалярное произведение [1].

Совокупность обобщенных резольвент оператора A определяется равенством [1]

$$R_\lambda(A)f = R_\lambda(\overset{\circ}{A})f +$$
$$+(\lambda - i)^{-1}\{\overset{\circ}{U},\overset{\circ}{U}_{\lambda,-i}\}^{-1}[I-\omega(\lambda)\mathrm{X}(\lambda)]^{-1}[\omega(\lambda)-I]\{\overset{\circ}{U},\overset{\circ}{U}_{\lambda,-i}\}f.$$

Спектральные функции E_t оператора A находятся применением формулы обращения Стильтьеса.

ТЕОРЕМА 1. Пусть оператор A регулярный, т.е. $\overset{\circ}{A}$ имеет чисто точечный спектр. Пусть, далее, $\Omega(\lambda)$ – матричная функция, соответствующая операторнозначной функции $\omega(\lambda)$ в базисе $\varphi_1(i),...,\varphi_n(i)$, $\varphi_\lambda^T = (\varphi_1(\lambda),...,\varphi_n(\lambda)), \Phi_{\lambda,\mu} = \varphi_\lambda\varphi_\mu^T$ $(\mathrm{Im}\,\lambda \ge 0,\ \mathrm{Im}\,\mu \ge 0)$. Для любого вещественного σ определим матричную функцию $\rho(\sigma)$, полагая

$$\rho(\sigma) = \int_0^\sigma \Phi_{t,-i}^{-1}d\tilde{\rho}(t)\Phi_{ti}^{-1},$$

где $\rho(t) = \pi^{-1}\Phi_{ii}\lim\limits_{\tau\to+0}\int_0^t \mathrm{Re}\{[\mathrm{X}(\lambda)\Omega(\lambda)+E][\mathrm{X}(\lambda)\Omega(\lambda)-E]^{-1}\}\,d\sigma.$

Тогда для любого $f \in H$ и любых α, β $(\alpha < \beta)$

$$E_{\alpha\beta}f = \int_\alpha^\beta (f,\varphi_\sigma)^T d\rho(\sigma)\varphi_\sigma,\quad E_{\alpha\beta} = E_{\beta+0} - E_\alpha.$$

3. Пример оператора дифференцирования. Обозначим через $\overset{\circ}{P}$ оператор дифференцирования m-го порядка в $L^2(R)$

$$\overset{\circ}{P}f = \sum_{k=0}^m a_k f^{(k)}, \tag{1}$$

определенный на максимально возможном линеале $D(\overset{\circ}{P})$ функций f, m раз дифференцируемых на R, производная $f^{(m-1)}$ абсолютно непрерывна и все производные $f^{(k)}, (k=1,...,m)$ принадлежат $L^2(R)$. Оператор $\overset{\circ}{P}$ является оператором свертки с обобщенной функцией Шварца $\xi = \sum\limits_{k=0}^m a_k\delta^{(k)}$,

где δ – функция Дирака: $\overset{\circ}{P}f = \xi * f$. Пусть $C(\{a_\alpha\})$ означает множество функций $f \in D(P)$ таких, что $f(a_\alpha) = f'(a_\alpha) = ... = f^{(k_\alpha)}(a_\alpha) = 0$,

$0 \le k_\alpha < \infty$, $\alpha = 1,2,...$ Определим P как замыкание оператора, заданного $D(P) = C(\{a_\alpha\})$ равенством (1).

ТЕОРЕМА 2. Пусть многочлен

$$P(t) = \sum_{k=0}^{m} a_k (2\pi i t)^k$$

вещественный. Тогда оператор P является симметричным с индексами дефекта (n,n), $n = \sum k_\alpha \le \infty$. Элементы дефектного подпространства $\aleph_{\bar{\lambda}}$ определяются следующим образом:

$$\varphi_{\alpha j}(x;\lambda) = \bar{F}\{t^j \exp(-2\pi i t a_\alpha)[P(t) - \lambda]\}, \qquad \alpha = 1,2,..., \quad j = 1,2,...,k_\alpha,$$

где F – преобразование Фурье в $L^2(R)$, $\bar{F} = F^{-1}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Александров Е. Л., Ильмушкин Г. М.* Обобщенные резольвенты изометрических и симметрических операторов // Известия вузов. Сер. Математика. 1977. № 1 (176). С. 14 – 23.
2. *Александров Е. Л.* О спектральных свойствах операторов свертки // Депонировано в ВИНИТИ 29.12.85, № 123-В86. – 25 с.

УДК 519.23

Е. Л. Александров, А. Хеббеш

О ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ И СПЕКТРАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ РЕГУЛЯРНЫХ СИММЕТРИЧНЫХ ОПЕРАТОРОВ, СОДЕРЖАЩИХ ИНВОЛЮЦИЮ

1. Пусть T – замкнутый оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве H с плотной областью определения $D(T)$. Число λ называется точкой регулярного типа оператора T, если существует такое $k = k(\lambda) > 0$, что при всех $f \in D(T)$ $\|(T - \lambda I)f\| \ge k\|f\|$. Оператор T называется регулярным, если все точки комплексной плоскости являются для него точками регулярного типа. Для регулярности симметричного оператора A достаточно, чтобы все вещественные точки были для него точками регулярного типа. Если хотя бы одно самосопряженное расширение симметричного оператора A с конечными дефектными числами имеет дискретный спектр, то и любое его другое самосопряженное расширение будет обладать этим свойством. Для того, чтобы этот случай имел место, необходимо и достаточно, чтобы A был регулярным [1].

В статье приводится критерий регулярности симметричного оператора с конечными дефектными числами, изучается спектр самосопряженного оператора умножения в H, содержащего инволюцию. Кроме того,