УДК 517.977

Н. Л. Андреева

О ЛИНЕЙНО-ВЫПУКЛОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ ПО НОРМЕ

Рассмотрим задачу оптимального управления, описанную линейными дифференциальными уравнениями

$$\frac{dx}{dt} = Ax + bu, \quad t \in [0,1], \qquad x(0) = x_0, \tag{1}$$

интегральным выпуклым критерием качества

$$I(x,u) = \int_0^1 F(x,u,t)\,dt \to \inf \tag{2}$$

и ограничениями на управляющую функцию

$$\|u(t)\|_{L_2[0,1]} \le c. \tag{3}$$

Здесь A – матрица размерности $n \times n$; b, x_0 – заданные векторы, c – заданная константа, $F(x,u,t)$ – равномерно-выпуклая по (x,u) функция, имеющая производные F'_x, F'_u, F''_{uu}, F''_{xt}, F''_{ut}, причём F'_x, F'_u удовлетворяют условию Липшица по совокупности переменных (x,u).

Равномерная выпуклость подынтегральной функции $F(x, u, t)$ обеспечивает строгую выпуклость функционала $I(x, u)$. Исходная задача будет иметь единственное решение, как задача на минимум строго выпуклого функционала $I(x,u)$ из (2) на выпуклом не пустом множестве пар функций $(x(t), u(t))$, удовлетворяющих ограничениям (1) и (3).

Для решения задачи (1) – (3) используем метод штрафных функционалов, рассмотрим штрафные функционалы $\Phi_k(x,u)$ вида

$$\Phi_k(x,u) = \frac{1}{\varepsilon_k}\left\| x(t) - e^{At}x_0 - \int_0^t e^{A(t-\xi)} b\,u(\xi)\,d\xi \right\|^2_{L_2^n[0,1]} + \frac{1}{\varepsilon_k}\left[\left(\|u(t)\|_{L_2[0,1]} - c\right)_+\right]^2, \tag{4}$$

где числовая последовательность $\varepsilon_k \downarrow 0$, функция $y_+ = \max(0, y)$, e^{At} – матричная экспонента.

Исходную задачу (1) – (3) заменим на последовательность задач $(k = 1, 2, \ldots)$

$$I_k(x,u) = I(x,u) + \Phi_k(x,u) \to \inf. \tag{5}$$

Другими словами, задачу (1) – (3) на условный экстремум заменим на последовательность задач на безусловный экстремум функционалов (5), где $u(t)\in L_2[0,1]$; $x(t)\in L_2^n[0,1]$. Функционалы $\Phi_k(x,u)$ определены в (4) и зависят от малого параметра $\varepsilon_k \downarrow 0$. Первое слагаемое в формуле (4) есть "штраф" за нарушение дифференциальных уравнений (1). Второе слагаемое соответствует ограничениям (3), и оно не равно нулю, как только это ограничение нарушается. Эти слагаемые выбраны таким образом, чтобы для любого $k=1,2,...$ функционал $\Phi_k(x,u)$ являлся выпуклым. Функционал $I_k(x,u)$ из (5) является строго выпуклым как сумма строго выпуклого и выпуклого функционалов. Для каждого значения k задача (5) имеет единственное решение $(x_k(t), u_k(t))$. По аналогии с тем, как это проделывалось раньше в [1, 2], можно доказать, что пара функций $(x_k(t), u_k(t))$ является единственным решением системы интегральных уравнений:

$$\begin{cases} x(t)-e^{At}x_0-\int\limits_0^t e^{A(t-\xi)}b\,u(\xi)d\xi-\frac{\varepsilon_k}{2}F_x'(x,u,t)=0, \\ F_u'(x,u,t)+2\varepsilon_k^{-1}c\,u(t)\cdot\left(\|u(t)\|_{L_2[0,1]}-c\right)_+/\|u(t)\|_{L_2[0,1]}+ \\ +\int\limits_t^1\left(e^{A(\xi-t)}b, F_x'(x(\xi),u(\xi),\xi)\right)_{R_n}d\xi=0, \end{cases} \tag{6}$$

где под знаком интеграла в последнем слагаемом записано скалярное произведение в пространстве векторов размерности n. Первое уравнение из системы (6) задаёт $x(t)$ по формуле, "совпадающей" с формулой Коши с точностью до слагаемого $\frac{\varepsilon_k}{2}F_x'(x, u, t)$, которое является малым в силу $\varepsilon_k \downarrow 0$. Если из первого уравнения системы (6) выразить $x(t)$ и подставить во второе уравнение, то его можно рассматривать как уравнение относительно функции $u(t)$.

ТЕОРЕМА. Последовательность $\{x_k(t), u_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ функций, удовлетворяющих системе уравнений (6), сходится к решению $(x^*(t), u^*(t))$ задачи (1) – (3) в пространстве непрерывных вектор-функций.

Схема доказательства. Из метода штрафных функционалов известна ограниченность норм последовательностей $\|x_k(t)\|_{L_2^n[0,1]}$, $\|u_k(t)\|_{L_2[0,1]}$ $(k=1,2,...)$ (см. [3]). Используя конкретный вид выпуклых штрафных функционалов $\Phi_k(x,u)$ из (4), можно доказать сходимость норм $\|x_k(t)\|_{L_2^n[0,1]}\to\|x^*(t)\|_{L_2^n[0,1]}$, $\|u_k(t)\|_{L_2[0,1]}\to\|u^*(t)\|_{L_2[0,1]}$ при $k\to\infty$, откуда будет следовать сходимость по норме в $L_2[0,1]$

$\left\| x_k(t) - x^*(t) \right\|_{L_2^n[0,1]} \to 0$, $\left\| u_k(t) - u^*(t) \right\|_{L_2[0,1]} \to 0$ при $k \to \infty$. Исследуя интегральные уравнения (6) для приближённых решений $x_k(t), u_k(t)$, можно доказать, что функции $\{x_k(t), u_k(t)\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ равномерно ограничены и равностепенно непрерывны, откуда и получим сходимость последовательности $\{x_k(t), u_k(t)\}$ к решению задачи (1) – (3) в пространстве непрерывных вектор-функций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Андреева Н. Л.* Алгоритм решения линейно-квадратичной задачи оптимального управления // Математика и её приложения: Межвуз. сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1991. Вып. 2. С. 56 – 57.

2. *Андреева Н. Л.* Интегральные уравнения с малым параметром для решения линейно-выпуклой задачи оптимального управления // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2000. Вып. 2. С. 6 – 7.

3. *Васильев Ф. П.* Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1980.

УДК 519.61

Е. В. Бабенкова, Ю. П. Васильев

ДЕМПФИРОВАНИЕ МЕТОДА СЕКУЩИХ ПРИ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ С НЕДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

В работе [1] рассматривается демпфированный метод секущих приближенного решения нелинейного уравнения. В данной статье на основании работ [2, 3] предлагается построение модифицированного метода секущих с демпфирующим множителем для приближенного решения нелинейных уравнений с недифференцируемыми операторами.

Пусть такие уравнения имеют вид

$$P(x) = 0, \tag{1}$$

где $P: D \subset R^n \to R^n$ недифференцируемый оператор, действующий в области D конечномерного банахова пространства R^n.

Рассмотрим итерационный процесс с формулой

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k J(x_k, x_{k-1} - x_k)^{-1} P(x_k),\ k = 0, 1, \ldots,\ \ x_{-1}, x_0 \in D, \tag{2}$$

x_{-1}, x_0 – начальные приближения; α_k – демпфирующий множитель, подавляющий скачки отклонений от нуля невязки и увеличивающий скорость сходимости итераций [1]; J – линейный оператор, аппроксимирующий производную Гато некоторого дифференцируемого оператора