$\left\| x_k(t) - x^*(t) \right\|_{L_2^n[0,1]} \to 0$, $\left\| u_k(t) - u^*(t) \right\|_{L_2[0,1]} \to 0$ при $k \to \infty$. Исследуя интегральные уравнения (6) для приближённых решений $x_k(t), u_k(t)$, можно доказать, что функции $\{x_k(t), u_k(t)\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ равномерно ограничены и равностепенно непрерывны, откуда и получим сходимость последовательности $\{x_k(t), u_k(t)\}$ к решению задачи (1) – (3) в пространстве непрерывных вектор-функций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Андреева Н. Л.* Алгоритм решения линейно-квадратичной задачи оптимального управления // Математика и её приложения: Межвуз. сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1991. Вып. 2. С. 56 – 57.

2. *Андреева Н. Л.* Интегральные уравнения с малым параметром для решения линейно-выпуклой задачи оптимального управления // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2000. Вып. 2. С. 6 – 7.

3. *Васильев Ф. П.* Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1980.

УДК 519.61

Е. В. Бабенкова, Ю. П. Васильев

ДЕМПФИРОВАНИЕ МЕТОДА СЕКУЩИХ ПРИ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ С НЕДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

В работе [1] рассматривается демпфированный метод секущих приближенного решения нелинейного уравнения. В данной статье на основании работ [2, 3] предлагается построение модифицированного метода секущих с демпфирующим множителем для приближенного решения нелинейных уравнений с недифференцируемыми операторами.

Пусть такие уравнения имеют вид

$$P(x) = 0, \tag{1}$$

где $P: D \subset R^n \to R^n$ недифференцируемый оператор, действующий в области D конечномерного банахова пространства R^n.

Рассмотрим итерационный процесс с формулой

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k J(x_k, x_{k-1} - x_k)^{-1} P(x_k),\ k = 0,1,\ldots,\ \ x_{-1}, x_0 \in D, \tag{2}$$

x_{-1}, x_0 – начальные приближения; α_k – демпфирующий множитель, подавляющий скачки отклонений от нуля невязки и увеличивающий скорость сходимости итераций [1]; J – линейный оператор, аппроксимирующий производную Гато некоторого дифференцируемого оператора

$P_1 : D \subset R^n \to R^n$ с параметром $h \in D_h \subset R^n$. Определим его следующим образом (например, для матрицы Якоби) [1]:

$$J(x,h) = \left(\frac{1}{h_1}\left[P_1(x+h_1e^1) - P_1(x)\right], \ldots, \frac{1}{h_n}\left[P_1(x+h_ne^n) - P_1(x)\right] \right), \qquad (3)$$

где

$$J : D_J \times D_h \subset R^n \times R^n \to L(R^n),\ x + h_ie^i \in D,\ h_i \neq 0,\ i = \overline{1,n},\ (x,h) \in R^n \times R^n,$$

e^i – i-й базисный (координатный) вектор.

Предположим, что $0 \in R^n$ является предельной точкой для D_h и отображение J является консистентной аппроксимацией для P_1' на $D_0 \subset D_J$, то есть $\lim\limits_{h \to 0} J(x,h) = P_1'(x)$ (равномерно по $x \in D_0$), где $h \in D_h$ (см. [1]).

1. Предположим, что P_1', $F = P - P_1$ удовлетворяют на D условию Липшица с постоянными k_0 и k_1 соответственно.

Для обоснования сходимости итерационного процесса (2) – (3) доказывается

ТЕОРЕМА 1. Пусть в открытом шаре $S_0(x_0, \rho)$ для $h \in D_h \cap S_h(0,\rho)$ существует $J^{-1}(x,h)$ и выполняются условия:

1) $\left\| E - P_1'(x)J^{-1}(x,h) \right\| \leq \gamma$, $0 < \gamma$;

2) $\left\| J^{-1}(x,h) \right\| \leq \lambda$, $0 < \lambda$;

3) $\left\| P(x_0) \right\| \leq \eta$, $0 < \eta$, $\gamma' = \gamma + k_1\lambda < 1$, $x_0 - x_{-1} \in D_h \cap S_h(0,\rho)$;

4) шар $\bar{S}(x_0, r_1) = \left\{ \|x - x_0\| \leq r_1,\ r_1 = \dfrac{\lambda\eta}{1 - \tilde{\alpha}_0^*} \right\} \subset S_0(x_0, \rho)$, где постоянная $\tilde{\alpha}_0^*$ определяется в ходе доказательства теоремы.

Тогда в шаре $\bar{S}(x_0, r_1)$ существует решение x^* уравнения (1): $P(x) = 0$, к которому сходится последовательность приближений (2) – (3) с

$$\alpha_k^* = \min\left\{ 1, \frac{1 - \gamma'}{k_0\lambda^2 \|P(x_k)\|} \right\}. \qquad (4)$$

Доказательство. Обозначим $z_k = -J(x_k, x_{k-1} - x_k)^{-1} P(x_k)$. Рассмотрим функцию $P(x_k + t z_k)$, где t – числовой параметр. Имеет место оценка

$$\left\| P(x_k + t z_k) - P(x_k) - tP_1'(x_k) z_k \right\| \leq \frac{t^2}{2} k_0 \|z_k\|^2 + k_1 t \|z_k\|.$$

Тогда

$$\|P(x_k + t z_k)\| \le (|1-t| + t\gamma')\|P(x_k)\| + \frac{t^2}{2} k_0 \lambda^2 \|P(x_k)\|^2 = \Psi(t),$$

где $\gamma' = \gamma + k_1\lambda < 1$. Минимум функции $\Psi(t)$ достигается в точке $t^* = \alpha_k^*$ (см. (4)).

Следовательно, для процесса (2) справедливо неравенство

$$\|P(x_{k+1})\| \le \Psi(\alpha_k^*) \le \|P(x_k)\| \cdot \left(1 - \frac{\alpha_k^*}{2}(1-\gamma')\right) \stackrel{def}{=} \tilde{\alpha}_k^* \|P(x_k)\|.$$

По построению очевидно, что $0 < \alpha_0^* \le \alpha_1^* \le \ldots \le 1$, и из (4) видим, что, начиная с некоторого номера k все $\alpha_k^* = 1$ (если $\alpha_0^* = 1$, то получаем обычный метод секущих). Таким образом, построенный модифицированный метод секущих с демпфированием (2) – (3) сходится.■

Замечание. Из доказательства видно, что для реализации алгоритма полученной первой модификации метода секущих требуется знание оценок k_0, γ', что не всегда эффективно с практической точки зрения.

2. Для метода секущих с демпфирующим параметром α_k рассмотрим вторую модификацию.

Очевидно, в (2) вектор $z_k = -J(x_k, x_{k-1} - x_k)^{-1} P(x_k)$ указывает направление, по которому можно улучшать приближения, а параметр α_k выбирается таким, чтобы норма $\|P(x_k + \alpha_k z_k)\|$ была по возможности меньше. Рассмотрим функции

$$\eta_k(t) = \|P(x_k + t z_k)\|, \quad \psi_k(t) = \left(1 - \frac{t}{2}\right)\|P(x_k)\|, \quad t \in [0,1].$$

Пусть последовательность $\{\alpha_k\}$, $0 < \alpha_k < 1$ удовлетворяет условиям

$$\prod_{i=0}^{\infty}\left(1 - \frac{\alpha_i}{2}\right) = 0, \quad \eta_k(\alpha_k) \le \psi_k(\alpha_k). \tag{5}$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть в открытом шаре $S_0(x_0, \rho)$ и для $h \in D_h \cap S_h(0,\rho)$, существует $J^{-1}(x,h)$ (см. (2)) и выполняются условия:

1) $\left\|J^{-1}(x,h)\right\| \le \lambda$, $0 < \lambda$;

2) $\|P(x_0)\| \le \eta$, $0 < \eta$, $x_{-1} - x_0 \in D_h \cap S_h(0,\rho)$;

3) шар $\overline{S}(x_0, r_2) = \{\|x - x_0\| \le r_2,\ r_2 = 2\lambda\eta\} \subset S_0(x_0, \rho)$.

Тогда в шаре $\overline{S}(x_0, r_2)$ существует решение x^* уравнения (1), к которому сходится итерационный процесс (2) – (3) с α_k из (5).

Доказательство. Рассмотрим строго возрастающую последовательность $s_m = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \prod_{i=0}^{k-1} \left(1 - \frac{\alpha_i}{2}\right)$. Она сходится, и справедливы оценки $0 < s_m \le 2$. Если $\prod_{i=0}^{\infty} \left(1 - \frac{\alpha_i}{2}\right) = 0$, то $s = \lim_{m \to \infty} s_m = 2$ (см. [3]). Отсюда по индукции нетрудно доказать оценки

$$\|P(x_k)\| \le \prod_{i=0}^{k-1} \left(1 - \frac{\alpha_i}{2}\right) \eta, \quad \|x_k - x_0\| \le s_{k-1} \lambda \eta < 2\lambda\eta,$$

из которых следует фундаментальность последовательности $\{x_k\}$ и существование пределов

$$\left\|P(x^*)\right\| = \lim_{k \to \infty} \|P(x_k)\| = 0, \quad x^* = \lim_{k \to \infty} x_k,$$

где x^* – решение (1).■

Замечания.

1. Для получения последовательности $\{\alpha_k\}$ может быть применен способ последовательного половинения α_k и ряд других приёмов с проверкой условий (5) [3].

2. В качестве примеров рассматривались нелинейные уравнения с недифференцируемым оператором Ван дер Вардена и др.

3. В конкретных случаях удачным выбором J и α_k удается получить демпфирование скачков приближений и значительное ускорение сходимости. В общем случае скорость сходимости линейная. Для дифференцируемого оператора в уравнении (1) получается асимптотически квадратичная скорость сходимости [3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ортега Дж., Рейнболдт В.* Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. М., 1975.

2. *Зинченко А. И.* О приближенном решении функциональных уравнений с недифференцируемыми операторами // Мат. Физика: Респ. межвед. сб. Киев, 1973. Вып. 14. С. 55 - 58.

3. *Фридрих Ф.* Об одном видоизменении методов Ньютона и градиентного для решения нелинейных функциональных уравнений // Методы вычислений. Л., 1966. С. 22 – 29.