УДК 681.3.06

Ю. А. Блинков

ИНВОЛЮТИВНЫЕ БАЗИСЫ ТОРИЧЕСКИХ ИДЕАЛОВ*

Рассмотрим задачу вычисления множества образующих торического идеала I [1 – 4], которые задаются соотношениями между мономами $\{m_1,\ldots,m_k\}$ состоящими из переменных $\{x_1,\ldots,x_n\}$. Решение можно получить, определив ядро гомоморфизма $\pi : k[\nu_1,...,\nu_k] \to k[x_1,...,x_k]$. Гомоморфизм π задается следующими соотношениями: $v_1 \mapsto m_1,\ldots,v_k \mapsto m_k$. Рассмотрим идеал J над $k[x_1,\ldots,x_n,v_1,\ldots,v_k]$, генерируемый образующими $\{v_1-m_1,\ldots,v_k-m_k\}$. Определим допустимое упорядочение, разделяющее переменные $x_1,\ldots,x_n$ и $v_1,\ldots,v_k$, тогда базис Грёбнера G идеала J даст соотношения между мономами $\{m_1,\ldots,m_k\}$, заданными $G \cup k[v_1,\ldots v_k]$.

В работах [5 – 8] были рассмотрены алгоритмы построения базисов Грёбнера специального вида, основанные на понятии инволютивного деления [6, 7, 9].

Определение 1. Мы будем говорить, что на множестве мономов M определено инволютивное деление L, если для любого конечного подмножества $U \subset M$ и для любого $u \in U$ задан подмоноид $L(u,U)$ моноида M, удовлетворяющий следующим условиям:

$a)$ из $w \in L(u,U)$ и $v \mid w$ следует $v \in L(u,U)$;

$b)$ из $u,v \in U$ и $uL(u,U) \cap vL(v,U) \neq \varnothing$ следует $u \in vL(v,U)$ или $v \in uL(u,U)$;

$c)$ из $v \in U$ и $v \in uL(u,U)$ следует $L(v,U) \subseteq L(u,U)$;

$d)$ из $V \subseteq U$ следует $L(u,U) \subseteq L(u,V)$ для всех $u \in V$.

Элементы $L(u,U)$ называются мультипликативными для u.

Для каждого $u \in U$ данное определение приводит к разделению

$$\{x_1,\ldots,x_n\} = M_L(u,U) \cup NM_L(u,U), \quad M_L(u,U) \cap NM_L(u,U) = \varnothing$$

множества переменных на два непересекающихся подмножества мультипликативных $M_L(u,U) \subset L(u,U)$ и немультипликативных $NM_L(u,U) \cap L(u,U) = \varnothing$ переменных.

В инволютивном делении, определённом на множестве мономов, не делящих друг друга в обычном смысле, может быть только один инволютивный делитель для произвольного монома. Это следствие свойства $b)$ инволютивного деления позволяет организовать его эффективный поиск,

---

* Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты № 00-15-96691, № 01-01-00708, и INTAS, грант № 99-1222.

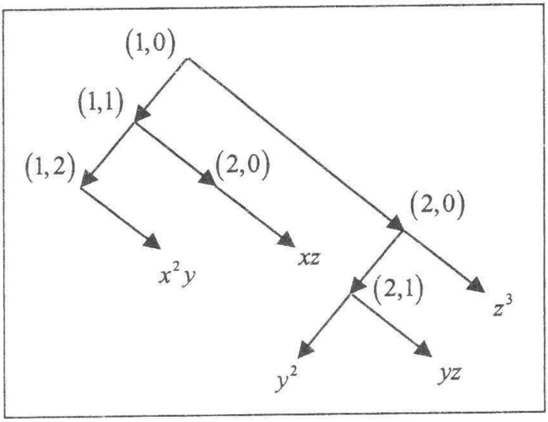
используя, например, метод сепарирующих мономов [10] или дерево Жане [11].

Определение 2. Деление Жане [12]. Для каждого индекса переменной $1 \le i \le n$ распределим элементы U по подгруппам, определяемым набором неотрицательных целых чисел $d_1, \ldots, d_i$:

$$[d_1, \ldots d_i] = \{u \in U \mid d_j = \deg_j(u), 1 \le j \le i\}.$$

Тогда переменная x_i является мультипликативной по Жане для $u \in U$, если $i = 1$ и $\deg_1(u) = \max\{\deg_1(v) \mid v \in V\}$, или если $i > 1$, $u \in [d_1, \ldots, d_{i-1}]$ и $\deg_i(u) = \max\{\deg_i(v) \mid v \in [d_1, \ldots, d_{i-1}]\}$.

Построим бинарное дерево, которое будем называть деревом Жане, структура которого отражает требуемое разбиение на подгруппы множества U, упорядоченное внутри каждой подгруппы по степеням переменных. Рассмотрим множество мономов $U = \{x^2 y, xz, y^2, yz, z^2\}$, $(x \succ y \succ z)$ и отобразим его в виде дерева Жане как показано на рисунке.



Дерево Жане

Листья дерева соответствуют мономам рассматриваемого множества. Левому потомку соответствует узел с большей степенью текущей переменной. Правый потомок указывает на узел с более старшей переменной согласно выбранному упорядочению. Структура дерева учитывает, в отличие от [11], разреженность мономов представленных в базисах торических идеалов из-за большого количества переменных. Данная информация представлена в паре, где первый элемент пары представляет собой номер текущий переменной, а второй – её степень.

Дерево Жане имеет временную сложность [11] нахождения делителя $O(n+d)$, для n-переменных и мономов, ограниченных общей степенью d.

При данных условиях, число мономов, не делящих друг друга в обычном смысле, имеет верхнюю оценку $\binom{n+d-1}{n-1}$, равную в точности числу мономов степени d.

Ввиду большого числа переменных и отсутствия арифметики основная сложность алгоритма построения базиса Грёбнера лежит в огромном числе двучленов [3 – 4], возникающих при построении базиса торического идеала. Быстрое определение делителя для проведения редукций при вычислении S-полинома (или немультипликативного продолжения для инволютивного алгоритма) значительно ускоряет алгоритм, поскольку число элементов в базисе Грёбнера экспоненциально зависит от степени исходных полиномов и количества переменных.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Conti P.*, *Traverso C.* Buchberger algorithm and integer programming. Proceedings AAECC-9 (new Orleans), Springer LNCS. 1991. Vol. 539. P. 130 – 139.

2. *Di Biase F.*, *Urbanke R.* An algorithm to calculate the kernel of certain polynomial ring homomorphisms. Experimental Mathematics. 1995. Vol. 4. P. 227 – 234.

3. *Pottier L.* Groebner bases of toric ideals. Rapport de recherche 2224 (1997), INRIA Sophia Antipolis.

4. *Bigatti A. M.*, *La Scala R.*,*Robbiano L.* Computing toric ideals // J. Symbolic Computation. 1999. Vol. 27. P. 351– 365.

5. *Жарков А. Ю.*, *Блинков Ю. А.* Инволютивные системы алгебраических уравнений // Программирование. 1994. № 1. С. 53 – 56.

6. *Gerdt V. P.*, *Blinkov Yu. A.* Involutive Bases of Polynomial Ideals // Mathematics and Computers in Simulation. 1998. Vol. 45. P. 519 – 542.

7. *Gerdt V. P.*, *Blinkov Yu. A.* Minimal Involutive Bases // Mathematics and Computers in Simulation. 1998. Vol. 45. P. 543 – 560.

8. *Apel J.* Gröbner Approach to Involutive Bases // J. Symbolic Computation. 1995. № 19. P. 441 – 458.

9. *Гердт В. П.*, *Блинков Ю. А.* Инволютивное деление мономов // Программирование. 1998. № 6. С. 22 – 24.

10. *Блинков Ю. А.* Метод сепарирующих мономов для инволютивных делений // Программирование. 2001. № 3. С. 43 – 45.

11. *Гердт В. П.*, *Янович Д. А.*, *Блинков Ю. А.* Быстрый поиск делителя Жане // Программирование. 2001. № 1. С. 32 – 36.

12. *Janet M.* Leçcons sur les Systèmes d'Equations aux Dérivées Partielles // Cahiers Scientifiques, IV, Gauthier-Villars. Paris, 1929.