УДК 517.546

Е. В. Варламова, Л. Л. Громова

ОБ ИНТЕГРАЛЬНЫХ СРЕДНИХ ДЛЯ ЗВЕЗДООБРАЗНЫХ ФУНКЦИЙ ПОРЯДКА α *

Обозначим через S_α^*, $0 \le \alpha < 1$, класс регулярных функций $f(z) = z + a_2 z^2 + \cdots$ в единичном круге и таких, что

$$\operatorname{Re}\frac{zf'(z)}{f(z)} > \alpha, 0 \le \alpha < 1.$$

При $\alpha=0$ имеем класс $S_0^* = S^*$ функций, звездообразных в единичном круге.

В настоящей статье изучается функционал

$$M_f(r) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(re^{i\theta})\right|^{\lambda_1}\left|f'(re^{i\theta})\right|^{\lambda_2} d\theta, \text{ где } f(z) \in S_\alpha^*,\ \lambda_1, \lambda_2 \in \Re,\ 0< r<1.$$

К исследованию интегральных средних обращались многие авторы, (см., например, [1, 2, 5]).

Известно [3] следующее: если $f(z) \in S^*, 0 < r < 1, z = re^{i\theta}, \lambda_1, \lambda_2 \in \Re$, $\lambda_1 + \lambda_2 \ge 0$, $\lambda_1 \ge 1 - 2\lambda_2, \lambda_2 \ge 0$, то

$$M_f(r) \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|K(z)\right|^{\lambda_1}\left|K'(z)\right|^{\lambda_2} d\theta. \tag{1}$$

Неравенство (1) точное только для функций Кёбе $K(z) = \dfrac{z}{(1 - e^{i\gamma}z)^2}$, $\gamma \in \Re$. Получим аналогичные неравенства в классе S_α^*, изменив схему рассуждений в [3]. Используем интегральное представление для $f(z) \in S_\alpha^*$

$$f(z) = z\exp\{-2(1-\alpha)\int_{-\pi}^{\pi}\ln(1 - e^{i\theta}z)d\mu(\theta)\}, \tag{2}$$

где $\mu(\theta)$ – неубывающая функция для $\theta \in [-\pi;\pi]$ и $\int_{-\pi}^{\pi} d\mu(\theta) = 1$. Считая $\mu(\theta)$ кусочно-постоянной, получим из (2) функции вида

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 01-01-00123.

$$f_n(z)=\frac{z}{\prod\limits_{k=1}^{n}(1-e^{i\theta_k}z)^{2(1-\alpha)\beta_k}}\in S_\alpha^*,\ \theta_k\in[-\pi;\pi]\ \text{ и }\ \beta_k\ge 0,\sum_{k=1}^{n}\beta_k=1.$$

Эти функции образуют подкласс $S_{\alpha,n}^*\subset S_\alpha^*$, всюду плотный в S_α^*, поэтому нижеследующие теоремы достаточно доказать для $f_n(z)$.

Сначала сформулируем вспомогательные утверждения.

ЛЕММА 1 [4]. Пусть $\varphi(t),\psi(t)$ – вещественные, чётные, 2π-периодические положительные функции, $t\in\Re$. Если φ, ψ не возрастают на $(0;\pi)$, тогда $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\psi(t+\theta)\,dt\le\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\psi(t)\,dt$. Неравенство точное только для $\theta=0$.

Лемма 1 непосредственно следует из неравенств для функций-перестановок [4].

ЛЕММА 2. Пусть φ, ψ – неотрицательные, чётные, 2π-периодические функции на $\Re$. Если φ, ψ не возрастают на $(0;\pi)$ или не убывают на $(0;\pi)$ и если $s>0$, $t\ge 1$, $\theta_j\in\Re$, $\beta_j>0$, $\sum\limits_{j=1}^{n}\beta_j=1$, то

$$\int_{-\pi}^{\pi}\prod_{k=1}^{n}\gamma^{s\beta_k}(\theta+\theta_k)\left(\sum_{j=1}^{n}\beta_j\psi(\theta+\theta_j)\right)^t d\theta\le\int_{-\pi}^{\pi}\varphi^s(\theta)\psi^t(\theta)d\theta. \tag{3}$$

Лемма 2 является следствием неравенства Гёльдера, Минковского ($t\ge 1$) и леммы 1.

ЛЕММА 3. Пусть φ, ψ – неотрицательные чётные, 2π-периодические функции на $\Re$. Если φ, ψ не возрастают на $(0;\pi)$, $s>0$, $0<t<1$, $\theta_j\in\Re$, $\beta_j>0$, $\sum\limits_{j=1}^{n}\beta_j=1$, тогда (3) выполняется, если существует γ, $0<\gamma<t$, такое, что $\varphi^s\psi^{\frac{-\gamma t}{t-\gamma}}$ не возрастает на $(0;\pi)$.

Доказательство. Имеем

$$\int_{-\pi}^{\pi}\prod_{k=1}^{n}\gamma^{s\beta_k}(\theta+\theta_k)\left(\sum_{j=1}^{n}\beta_j\psi(\theta+\theta_j)\right)^t d\theta\le$$

$$\le\prod_{k=1}^{n}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\varphi^s(\theta+\theta_k)\left(\sum_{j=1}^{n}\beta_j\psi(\theta+\theta_j)\right)^t d\theta\right)^{\beta_k}.$$

Положим $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi^s(\theta)\psi^\gamma(\theta)\psi^{-\gamma}(\theta)\left(\sum\limits_{j=1}^{n}\beta_j\psi(\theta+\theta_j)\right)^t d\theta=$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\varphi^s(\theta)\psi^t(\theta)\right)^{\frac{\gamma}{t}} \left(\varphi^s(\theta)\psi^{\frac{-\gamma t}{t-\gamma}}(\theta) \left(\sum_{j=1}^{n} \beta_j \psi(\theta+\theta_j) \right)^{\frac{t^2}{t-\gamma}} \right)^{\frac{t-\gamma}{t}} d\theta.$$

Применяя неравенство Гёльдера, выбираем γ так, что $0< \gamma < t$ и $\frac{t^2}{t-\gamma} \geq 1$. Применяя неравенство Минковского, получаем утверждение леммы 3.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $f(z) \in S_\alpha^*$, $0 < \alpha < 1$, $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$, $\lambda_2 \geq 1$. Тогда

$$M_f(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f(re^{i\theta}) \right|^{\lambda_1} \left| f'(re^{i\theta}) \right|^{\lambda_2} d\theta \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| K_\alpha(z) \right|^{\lambda_1} \left| K'_\alpha(z) \right|^{\lambda_2} d\theta, \ 0< r < 1,$$

$z = re^{i\theta}$. Оценка точная, экстремальной является функция Кёбе

$$K_\alpha(z) = \frac{z}{(1-e^{i\gamma}z)^{2(1-\alpha)}}, \ \gamma \in \Re.$$

Доказательство. Полагаем $f(z) = f_n(z)$. Тогда

$$M_{f_n}(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f_n(z) \right|^{\lambda_1} \left| f'_n(z) \right|^{\lambda_2} d\theta = \frac{1}{2\pi r^{\lambda_2}} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f_n(z) \right|^{\lambda_1+\lambda_2} \left| \frac{zf'_n(z)}{f_n(z)} \right|^{\lambda_2} d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi r^{\lambda_2}} \int_{-\pi}^{\pi} \prod_{k=1}^{n} \left(\left| \frac{z}{(1-e^{i\theta_k}z)^{2(1-\alpha)}} \right|^{\lambda_1+\lambda_2} \left| \frac{zf'_n(z)}{f_n(z)} \right|^{\lambda_2} \right)^{\beta_k} d\theta.$$

$$\frac{zf'_n(z)}{f_n(z)} - \alpha = (1-\alpha) \sum_{k=1}^{n} \beta_k \frac{1+e^{i\theta_k}z}{1-e^{i\theta_k}}, \ 0 \leq \beta_k < 1, \ \sum_{k=1}^{n} \beta_k = 1.$$

Обозначим $\varphi(\theta+\theta_k) = \left| \frac{z}{(1-e^{i\theta_k}z)^{2(1-\alpha)}} \right|$, $\psi(\theta+\theta_j) = \left| \frac{1+e^{i\theta_j}z(1-2\alpha)}{(1-e^{i\theta_j}z)} \right|$.

Функции $\varphi_1(\theta) = \left| 1-re^{i\theta} \right|$ и $\psi_1(\theta) = \left| \frac{1-re^{i\theta}}{1+re^{i\theta}(1-2\alpha)} \right|$ возрастают на $(0; \pi)$ при $0<r\leq 1$. Из леммы 1 и леммы 2 имеем

$$M_{f_n}(r) \leq \frac{r^{\lambda_1}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{1}{(1-z)^{2(1-\alpha)}} \right|^{\lambda_1+\lambda_2} \left| \frac{1+z(1-2\alpha)}{1-z} \right|^{\lambda_2} d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \left| K_\alpha(z) \right|^{\lambda_1} \left| K'_\alpha(z) \right|^{\lambda_2} d\theta.$$

При $n \to \infty$ получаем утверждение теоремы.

ТЕОРЕМА 2. Пусть

$$f(z) \in S_\alpha^*, \ \sqrt{2}-1 \leq \alpha < 1, \ \lambda_1, \lambda_2 \in \Re, \ \lambda_1 + \lambda_2 \geq 0,$$

$$0 \le \lambda_2 < 1,\ (1-\alpha)\lambda_1 + (2-\alpha)\lambda_2 \ge 1.$$

Тогда утверждение теоремы 1 сохраняется.

Доказательство. Снова полагаем $f(z) = f_n(z)$. Применяя лемму 3, положим

$$t = \lambda_2,\quad s = \lambda_1 + \lambda_2,\quad \gamma = \frac{\lambda_2(1-\alpha)(\lambda_1+\lambda_2)}{(1-\alpha)\lambda_1 + (2-\alpha)\lambda_2},$$

$$P(\theta) = \varphi^s(\theta)\psi^{\frac{-\gamma t}{t-\gamma}}(\theta) = \varphi^{\lambda_1+\lambda_2}(\theta)\psi^{-(1-\alpha)(\lambda_1+\lambda_2)}(\theta) =$$

$$= \left|\frac{1}{(1-z)^{2(1-\alpha)}}\right|^{\lambda_1+\lambda_2} \left|\frac{1+z(1-2\alpha)}{1-z}\right|^{-(1-\alpha)\lambda_1+\lambda_2} = \left|\frac{1}{(1-z)(1+z(1-2\alpha))}\right|^{(1-\beta)(\lambda_1+\lambda_2)}.$$

Если $1/2 \le \alpha < 1$, то функция $P_1(\theta) = \left|1-re^{i\theta}\right|\left|1+re^{i\theta(1-2\alpha)}\right|$ возрастает на $(0;\pi)$ при $0 < r \le 1$. Если же $\sqrt{2}-1 \le \alpha < 1/2$, то

$$P_2(\theta) = \left|1-re^{i\theta}\right|^2 \left|1+r(1-2\alpha)e^{i\theta}\right|^2 -$$

квадратный трёхчлен для $s = -\cos t$. Легко убедиться, что $P_2(\theta)$ возрастает на $(0;\pi)$ при $0 < r \le 1$, что завершает доказательство теоремы.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $f(z) \in S_\alpha^*$, $0 < \alpha < \sqrt{2}-1$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \Re$, $\lambda_1 + \lambda_2 \ge 0$, $0 \le \lambda_2 \le 1$, $\lambda_1(1-\alpha) + \lambda_2(2-\alpha) \ge 1$.

Тогда утверждение теоремы 1 сохраняется при

$$0 < r < \frac{\sqrt{1-2\alpha}+1-\alpha}{\alpha\sqrt{1-2\alpha}}, z = re^{i\theta}.$$

Доказательство. Нетрудно убедиться, что при $0 < \alpha < \sqrt{2}-1$ функция $P_1(\theta)$ возрастает при $\theta \in (0;\pi)$ для $r \in (0;r_0)$, где $r_o = \frac{-\sqrt{1-2\alpha}+1-\alpha}{\alpha\sqrt{1-2\alpha}} < 1$. Рассуждая, как в теореме 2, завершаем доказательство.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Baernstein A.* II Integral means univalent functions and circular simmetrization. Acta Math. 1974. № 133. С. 139 – 169.

2. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. 2-е изд. М.: Наука, 1966.

3. *Громова Л. Л., Зыбина Т. Т.* Об интегральных средних для звездообразных функций. Уч. зап. СГПИ. 1968. Вып. 46. С. 6 – 12.

4. *Харди Г. Г., Литтльвуд Д. Е., Полиа Г.* Неравенства. М.: ГИИЛ, 1948.

5. *Livingston A. E.* On the integral means of univalent, meromorphic function // Pacif. J. Math. 1977. Vol. 72. P. 167 – 180.