УДК 518.6

**Л. Ф. Вахлаева, Т. В. Вахлаева, Е. А. Павлова**

# ЭКОНОМИЧНЫЕ АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ РАЗНОСТНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Для решения разностных уравнений математической физики применяются итерационные методы, которые учитывают специфику матрицы системы, имеющей большое число нулевых элементов, и не требуют хранения в памяти ЭВМ матрицы большого порядка. Рассматриваются следующие итерационные методы: простая итерация, метод Зейделя, метод верхней релаксации, попеременно-треугольный метод, метод переменных направлений, которые применяются к решению разностных краевых задач для уравнения Пуассона, уравнения с переменными коэффициентами, бигармонического уравнения, слабонелинейного уравнения второго порядка. При этом используются два типа аппроксимации частных производных – второго и четвертого порядков точности. В результате вычислительных экспериментов на модельных задачах найдены экономичные алгоритмы для каждого класса задач.

Любой двухслойный итерационный метод может быть записан в канонической форме

$$B\frac{y^{(k+1)}-y^{(k)}}{\tau_k}+Ay^{(k)}=f,\ k=0,1,2,..., \qquad (1)$$

$y^{(0)}$ – начальное приближение задано, $y^{(0)}=\left(y_1^{(0)},...y_M^{(0)}\right)$, $B$ – линейный оператор, имеющий обратный $B^{-1}$, $\tau_k$ – итерационный параметр, $A$ – квадратная матрица размерности $M\times M$, соответствующая исходной системе разностных уравнений

$$Ay=f. \qquad (2)$$

Если $B$ – диагональная или треугольная матрица, то счет идет по явным формулам, в противном случае решение системы (2) сводится к решению системы

$$By^{(k+1)}=By^{(k)}+\tau_k(f-Ay^{(k)}),\ y^{(0)}\text{ – задано.} \qquad (3)$$

Задача состоит в выборе оператора $B$ и параметров $\tau_k$ таким образом, чтобы число арифметических действий, необходимых для получения решения системы (3) с требуемой точностью $\varepsilon>0$, было наименьшим для заданного класса задач, т.е. в выборе экономичного алгоритма. Общее число арифметических действий, необходимых для получения решения системы (2) с точностью $\varepsilon$, определяется по формуле: $Q_n(\varepsilon)=q_0n(\varepsilon)$, где $q_0(B,A)$ – число арифметических действий на каждой итерации, $n(\varepsilon)$ – количество итераций, необходимых для получения решения с точностью $\varepsilon$. Минимизировать $q_0$ можно с помощью оператора $B$, а также путем понижения порядка системы разностных уравнений (2), а этого можно добиться повышением порядка точности разностных уравнений.

1. Первая краевая задача для уравнения Пуассона

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2}=-f(x_1,x_2),\quad \overline{D}=\{0\le(x_1,x_2)\le 1\}=D+\Gamma,\quad U\big|_\Gamma=\mu(x). \qquad (4)$$

Введем сетку $\overline{\omega}_h=\{x_{ij}=(ih,jh),\ (i,j)=\overline{0,N},\ h=1/N\}$ и сеточную функцию $y_{ij}=y(ih,jh)$. Задаче (4) сопоставим разностную схему 2-го порядка точности

$$y_{\bar{x}_1x_1}+y_{\bar{x}_2x_2}=-f(x),\quad x\in\omega_h,\quad \overline{\omega}_h=\omega_h+\gamma_{h,},\quad y\big|_{\gamma_h}=\mu(x). \qquad (5)$$

Для решения полученной системы разностных уравнений $Ay=f$ применим итерационные методы [1]:

а) простой итерации (в этом случае $B{=}E$);

б) Зейделя и верхней релаксации ($B=D+\omega A^-,\ \tau_k\equiv\omega, A=$ $=A^-+D+A^+$) $\omega=1$ для метода Зейделя, счет по явным формулам;

в) попеременно-треугольный метод (один шаг итерации разбивается на два этапа, на каждом счет осуществляется по явным формулам);

г) метод переменных направлений (тоже два этапа, однако здесь используется на каждом этапе метод прогонки);

д) метод верхней релаксации, примененный к разностной схеме повышенной точности

$$y_{\bar{x}_1x_1}+y_{\bar{x}_2x_2}+h^2\,y_{\bar{x}_1x_1\bar{x}_2x_2}/6=-\left(f+h^2\left(f_{\bar{x}_1x_1}+f_{\bar{x}_2x_2}\right)/12\right). \qquad (6)$$

Использование схемы 4-го порядка приводит к уменьшению порядка системы разностных уравнений в $7-8$ раз и к уменьшению $Q_n(\varepsilon)$ в $3-4$ раза по сравнению с другими методами для схемы (5). Итак, для задачи (4) оптимальным экономичным алгоритмом является метод верхней релаксации, примененный к разностной схеме (6).

2. Третья краевая задача для трехмерного уравнения с постоянными коэффициентами

$$LU\equiv\sum_{\alpha=1}^{3}A_\alpha\frac{\partial^2 U}{\partial x_\alpha^2}=-f(x),\quad 0<x=(x_1,x_2,x_3)<1,$$

$$K\frac{\partial U}{\partial n}=CU-g(x),\quad x\in\Gamma.$$

Здесь $n$ – внутренняя нормаль к границе $\Gamma$, $g(x)$ – заданная функция, $K$ и $C$ – заданные коэффициенты.

Построены разностные схемы 4-го порядка точности. Здесь уже применение схемы повышенной точности сокращает порядок системы не в 7 раз, а в десятки раз. Сравнение на модельных задачах показало, что самым экономичным является метод верхней релаксации для схемы 4-го порядка точности.

3. Первая краевая задача для уравнения с переменными коэффициентами

$$\sum_{\alpha=1}^{3} B_\alpha(x)\frac{\partial^2 U}{\partial x_\alpha^2} = -f(x), \quad 0 < x = (x_1, x_2, x_3) < 1.$$

Построены разностные схемы 2-го и 4-го порядков точности. Исследования на модельных задачах показали, что экономичным алгоритмом является метод верхней релаксации для схемы 4-го порядка.

4. Первая краевая задача для слабонелинейного уравнения в трехмерной области

$$\sum_{\alpha=1}^{3}\frac{\partial^2 U}{\partial x_\alpha^2} = K_0\left(x, U, \frac{\partial U}{\partial x_1}, \frac{\partial U}{\partial x_2}, \frac{\partial U}{\partial x_3}\right), \quad 0 < x = (x_1, x_2, x_3) < 1.$$

В [2] построены разностные схемы 2-го и 4-го порядков точности для двумерного уравнения, найден экономичный алгоритм – метод верхней релаксации, примененный к схеме 4-го порядка точности. Вычислительные эксперименты на модельных задачах в случае трехмерной области подтвердили этот вывод.

5. Бигармоническое уравнение

$$\frac{\partial^4 U}{\partial x_1^4} + 2\frac{\partial^4 U}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 U}{\partial x_2^4} = q(x), \quad 0 < x = (x_1, x_2) < 1.$$

Краевые условия двух типов:

$$\text{а) } U\big|_\Gamma = \frac{\partial U}{\partial n}\bigg|_\Gamma = 0, \qquad \text{б) } U\big|_\Gamma = \frac{\partial^2 U}{\partial n^2}\bigg|_\Gamma = 0.$$

Построены разностные схемы 2-го и 4-го порядка, для их решения применены итерационные методы. Сравнение на модельных задачах показало, что экономичный алгоритм – это метод верхней релаксации для схемы повышенной точности.

Итак, на основании исследований, проведенных на модельных задачах для пяти уравнений математической физики, сделан вывод, что оптимальным экономичным алгоритмом является метод верхней релаксации для схемы повышенной точности.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Самарский А. А., Николаев Е. С.* Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978.

2. *Вахлаева Л. Ф., Вахлаева Т. В.* Разностные методы повышенной точности для слабонелинейного эллиптического уравнения и сравнение их со схемами 2-го порядка точности. Саратов, 1996. 9 с. Деп. в ВИНИТИ. 24.09.96. № 2855-В 96.