ему квантор одного типа, то они меняются местами. Если произошла смена типа кванторов, то применяется принцип идеализации, иначе - принцип стандартизации.

Программа состоит из трех модулей. В основном модуле реализованы: синтаксический анализ, лексический анализ и вычислительный алгоритм. Во втором даны описания лексических и синтаксических структур, а также некоторые вспомогательные функции и процедуры для работы с ними. Третий модуль содержит процедуру, выдающую сообщение об ошибке.

ЛИТЕРАТУРА

Nelson E. Internal set theory. A new approach to nonstandard analysis // Bull. Amer. Math. Soc. 1977. Vol. 83, № 6. P. 1165 – 1198.

УДК 517.984

О. Б. Горбунов

СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА СИСТЕМЫ ДИРАКА С НЕИНТЕГРИРУЕМОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ ВНУТРИ ИНТЕРВАЛА

1. Рассмотрим краевую задачу для системы Дирака вида

$$BY' + (P(x) + P_\gamma(x))Y = \lambda Y, \quad 0 < x < \pi, \ \gamma \in (0, \pi), \tag{1}$$

$$V_1^T(\alpha)Y(0) = V_1^T(\beta)Y(\pi) = 0, \tag{2}$$

где

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}, \quad P(x) = \begin{pmatrix} p_1(x) & p_2(x) \\ p_2(x) & -p_1(x) \end{pmatrix}, \quad P_\gamma(x) = \frac{\mu}{x-\gamma}\begin{pmatrix} \sin 2\varphi & \cos 2\varphi \\ \cos 2\varphi & -\sin 2\varphi \end{pmatrix},$$

$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $V(\alpha) = (V_1(\alpha), V_2(\alpha)) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, T – знак транспонирования.

Здесь $p_k(x)$ – комплекснозначные функции, $\mu, \alpha, \beta, \varphi$ – комплексные числа. Пусть для определенности $\operatorname{Re}\alpha, \operatorname{Re}\beta, \operatorname{Re}\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$, $\operatorname{Re}\mu > 0$, $\mu + 1/2 \notin \mathrm{N}$, и пусть $|x-\gamma|^{-2\operatorname{Re}\mu} |p_k(x)| \in L(0,\pi)$, $p_k(x) \in W_1^1(0,\pi)$, $k = 1,2$.

Система Дирака без особенности изучена достаточно полно (см., например, [1]). Цель работы – выявить аналитические и асимптотические свойства характеристической функции (ХФ) задачи (1), (2), исследовать поведение спектра и функции Вейля (ФВ) задачи (1), (2). Для оператора Штурма-Лиувилля подобные результаты получены в [2].

При работе с задачей (1), (2) важную роль играет специальная фундаментальная система решений системы уравнений (1) $\{S_j(x,\lambda)\}_{j=1,2}$, изучавшаяся в [3]. Эти решения могут быть найдены из следующих интегральных уравнений:

$$S_j(x,\lambda) = C_j(x,\lambda) + \int_\gamma^x C(x,\lambda)C^{-1}(t,\lambda)BP(t)S_j(t,\lambda)dt, \ \ j=1,2,$$

где $C(x,\lambda) = \left(C_1(x,\lambda), C_2(x,\lambda)\right)$, $C_j(x,\lambda) = (x-\gamma)^{\mu_j} V(-\varphi)\hat{C}_j(\lambda(x-\gamma))$,

$$\left(\hat{C}_1(t), \hat{C}_2(t)\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} t^{2k} \begin{pmatrix} tc_{1,2k+1} & c_{2,2k} \\ -c_{1,2k} & tc_{2,2k+1} \end{pmatrix}, \qquad c_{j,2k+1} = c_{j,2k}\left(2\mu_j + 1 + 2k\right)^{-1},$$

$$c_{j,2k} = c_{j0}\left((-1)^k 2^k k! \prod_{s=0}^{k-1}(2\mu_j + 1 + 2s)\right)^{-1}, \quad c_{10}c_{20} = 1, \quad \mu_j = (-1)^j \mu, \quad j=1,2,$$

здесь и далее считаем, что $x^\mu = \exp\left(\mu(\ln|x| + i\arg x)\right)$, $\arg x \in (-\pi, \pi\,]$, при этом $S_j(x,\lambda)$ – целые по λ первого порядка, и $\det\left(S_1(x,\lambda), S_2(x,\lambda)\right) \equiv 1$, где $S(x,\lambda) = \left(S_1(x,\lambda), S_2(x,\lambda)\right)$.

В [3] также получена следующая асимптотика при $|\lambda(x-\gamma)| \geq 1$ и $|\lambda| \to \infty$:

$$S_j(x,\lambda) = \beta_j^0 \lambda^{-\mu_j} e^{2i\pi\mu_j m}\left(e^{-i\lambda(x-\gamma)+i\varphi}\begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}_\gamma - (-1)^j e^{i\pi\mu_j l^0} e^{i\lambda(x-\gamma)-i\varphi}\begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}_\gamma\right), \ j=1,2, \quad (3)$$

где $\left[(a_i)_{i=1,2}\right]_\gamma = \left(a_i + O\left(|\lambda(x-\gamma)|^{-\nu}\right)\right)_{i=1,2}$, $\quad \beta_1^0\beta_2^0 = \dfrac{1}{4i\cos\pi\mu}$,

$$\nu = \begin{cases} 1, \operatorname{Re}\mu \geq 1/2, \\ 2\operatorname{Re}\mu, 0 < \operatorname{Re}\mu < 1/2, \end{cases} \quad l^0 = \begin{cases} -1, \arg\left(\lambda(x-\gamma)\right) \in \Pi_0, \\ 1, \arg\left(\lambda(x-\gamma)\right) \in C\Pi_0, \end{cases}$$

$$m = \begin{cases} 1, \ \arg\lambda \in \Pi_1, x < \gamma, \\ -1, \ \arg\lambda \in \Pi_{-1}, x > \gamma, \qquad C\Pi_0 = \Pi_{-1} \cup \Pi_1, \\ 0, \ \text{в остальных случаях}, \end{cases}$$

$$\Pi_k = \left\{z : \arg z \in \left(\pi(5k-3)/(6-2k), \pi(5k+3)/(6+2k)\right]\right\}, \quad k = 0, \pm 1.$$

2. Введем в рассмотрение следующие функци:

$$\Phi_2(x,\lambda) = S(x,\lambda)S^{-1}(0,\lambda)V_2(\alpha),$$

$$\psi_2(x,\lambda) = S(x,\lambda)S^{-1}(\pi,\lambda)V_2(\beta),$$

$$\Delta(\lambda) = V_1^T(\beta)\Phi_2(\pi,\lambda) = -V_1^T(\alpha)\psi_2(0,\lambda) = V_1^T(\beta)S(\pi,\lambda)S^{-1}(0,\lambda)V_2(\alpha),$$

$$\Phi_1(x,\lambda) = -\psi_2(x,\lambda)/\Delta(\lambda),$$

$$M(\lambda) = V_2^T(\alpha)\Phi_1(0,\lambda),$$

функцию $\Delta(\lambda)$ назовем ХФ задачи (1), (2), её нули совпадают с собственными значениями (СЗ) задачи (1), (2), поскольку $\det(\Phi_2,\psi_2)\equiv\Delta(\lambda)$; функция $M(\lambda)$ называется ФВ задачи (1), (2).

ТЕОРЕМА 1. ХФ $\Delta(\lambda)$ обладает следующими свойствами:

1) $\Delta(\lambda)=-\dfrac{1}{2i}e^{i(\pi\lambda+\alpha-\beta)}[1]+\dfrac{1}{2i}e^{-i(\pi\lambda+\alpha-\beta)}[1]-l\sin\pi\mu\, e^{il(\lambda(\pi-2\gamma)-2\varphi-\alpha-\beta)}[1]$,

где $[1]=\left(1+O\left(|\lambda|^{-\nu}\right)\right)$, при $|\lambda|\to\infty$, $l=\begin{cases}-1, \arg\lambda\in\Pi_0,\\ \ \ 1, \arg\lambda\in C\Pi_0;\end{cases}$

2) существуют $h>0, C_h>0$, что $\Delta(\lambda)\geq C_h\exp(\pi|\mathrm{Im}\lambda|)$, при $|\mathrm{Im}\lambda|\geq h$, следовательно, весь спектр задачи (1), (2) лежит в полосе $|\mathrm{Im}\lambda|<h$;

3) число нулей N_a ХФ $\Delta(\lambda)$ в $R_a=\{\lambda:|\mathrm{Im}\lambda|\leq h, \mathrm{Re}\lambda\in[a,a+1]\}$ равномерно ограничено по a;

4) обозначим $G_\delta=\{\lambda:|\lambda-\lambda_k|\geq\delta, k\in Z\}$, где $\{\lambda_k\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ – СЗ задачи l, тогда $\Delta(\lambda)\geq C_\delta\exp(\pi|\mathrm{Im}\lambda|), \lambda\in G_\delta$;

5) существует $R_n\to+\infty$, что при достаточно малом δ, все окружности $|\lambda|=R_n$ лежат в G_δ при всех n;

6) $\Delta(\lambda)$ однозначно определяется своими нулями $\{\lambda_k\}_{k=-\infty}^{+\infty}$, с учетом кратности.

Для определённости ограничимся случаем простого спектра, то есть случаем, когда ХФ имеет только простые нули.

ТЕОРЕМА 2. ФВ $M(\lambda)$ обладает следующими свойствами:

1) $M(\lambda)$ – мероморфна, и имеет полюса в СЗ задачи (1), (2);

2) справедлива асимптотика

$$M(\lambda)=\frac{\cos(\pi\lambda+\alpha-\beta)-i\sin\pi\mu\, e^{il(\lambda(\pi-2\gamma)-2\varphi-\alpha-\beta)}}{\sin(\pi\lambda+\alpha-\beta)+l\sin\pi\mu\, e^{il(\lambda(\pi-2\gamma)-2\varphi-\alpha-\beta)}}+O\left(|\lambda|^{-\nu}\right),$$

при $|\lambda|\to\infty,\quad \lambda\in G_\delta$;

3) имеет место разложение

$$M(\lambda)=M^0(\lambda)+\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{a_k}{\lambda-\lambda_k}-\frac{a_k^0}{\lambda-\lambda_k^0}\right),$$

где $\{\lambda_k^0\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ – СЗ, $M^0(\lambda)$ – ФВ задачи (1), (2) с $P(x)\equiv 0$, причём ряд сходится «со скобками», то есть $\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty}=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{|\lambda_k|,|\lambda_k^0|<R_n}$;

4) ФВ однозначно определяется заданием вычетов $\{a_k\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ и СЗ $\{\lambda_k\}_{k=-\infty}^{+\infty}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Левитан Б. М., Саргсян И. С.* Операторы Штурма-Лиувилля и Дирака. М.: Наука, 1988.

2. *Юрко В. А.* О восстановлении дифференциальных операторов Штурма-Лиувилля с особенностями внутри интервала // Матем. заметки. 1998. Т. 64, № 1. С. 143 – 156.

3. *Горбунов О. Б.* О системе Дирака с неинтегрируемой особенностью внутри интервала // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2000. Вып. 2. С. 21 – 24.

УДК 517.984

А. П. Гуревич, А. П. Хромов

О ЗАМЫКАНИИ В ПРОСТРАНСТВЕ $C^q[0,1]$ ОБЛАСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА*

Обозначим через D_L область определения оператора $L(y) = y^{(n)}(x) + p_2(x)y^{(n-2)}(x) + \ldots + p_n(x)y(x)$, $x \in [0;1]$, с условиями

$$V_j(y) = U_j(y) - (y, \varphi_j) = 0, \quad (j = 1, \ldots, n), \tag{1}$$

где

$$U_j(y) = \sum_{k=0}^{k_j} (a_{jk} y^{(k)}(0) + b_{jk} y^{(k)}(1)), \quad (y, \varphi_j) = \int_0^1 y(x)\varphi_j(x)dx, \quad \varphi_j(x) \in C[0;1].$$

Предполагаем, что формы $U_j(y)$ нормированы [1, с. 65 – 66]. Операторы такого вида встречаются, например, в [2]. В данной статье найдено замыкание D_L в пространстве $C^q[0,1]$, $q = 0,1,\ldots,n-1$.

Обозначим через n_q наименьшее значение j, при котором $k_j \le q$.

ЛЕММА 1. Предположим, что $f(x) \in C^q[0,1]$ и удовлетворяет краевым условиям $V_j(y) = 0$, $j = n_q, \ldots, n$. Тогда существует последовательность $\{y_m(x)\}_{m=1}^{\infty}$ такая, что 1) $y_m(x) \in C^n[0;1]$; 2) $V_j(y_m) = 0$, $j = n_q, \ldots, n$; 3) $y_m(x) \to f(x)$ в пространстве $C^q[0,1]$.

Доказательство. Пусть $\{p_m(x)\}_{m=1}^{\infty}$ – последовательность алгебраических многочленов, сходящаяся к $f(x)$ в пространстве $C^q[0,1]$. Тогда $V_j(p_m) \to V_j(f) = 0$ при $m \to \infty$, $j = n_q, \ldots, n$. То есть, $V_j(p_m) = o_m(1)$. Обозначим через $\{\psi_i(x)\}_{i=n_q}^{n}$ произвольный набор функций из $C^n[0,1]$, для

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 00-01-00075, и программы “Ведущие научные школы”, проект № 00-15-96123.