СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Левитан Б. М., Саргсян И. С.* Операторы Штурма-Лиувилля и Дирака. М.: Наука, 1988.

2. *Юрко В. А.* О восстановлении дифференциальных операторов Штурма-Лиувилля с особенностями внутри интервала // Матем. заметки. 1998. Т. 64, № 1. С. 143 – 156.

3. *Горбунов О. Б.* О системе Дирака с неинтегрируемой особенностью внутри интервала // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2000. Вып. 2. С. 21 – 24.

УДК 517.984

А. П. Гуревич, А. П. Хромов

О ЗАМЫКАНИИ В ПРОСТРАНСТВЕ $C^q[0,1]$ ОБЛАСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА*

Обозначим через D_L область определения оператора $L(y)=y^{(n)}(x)+p_2(x)y^{(n-2)}(x)+\ldots+p_n(x)y(x),\ \ x\in[0;1]$, с условиями

$$V_j(y)=U_j(y)-(y,\varphi_j)=0,\ \ (j=1,\ldots,n), \tag{1}$$

где

$$U_j(y)=\sum_{k=0}^{k_j}(a_{jk}y^{(k)}(0)+b_{jk}y^{(k)}(1)),\ \ (y,\varphi_j)=\int_0^1 y(x)\varphi_j(x)dx,\ \ \varphi_j(x)\in C[0;1].$$

Предполагаем, что формы $U_j(y)$ нормированы [1, с. 65 – 66]. Операторы такого вида встречаются, например, в [2]. В данной статье найдено замыкание D_L в пространстве $C^q[0,1]$, $q=0,1,\ldots,n-1$.

Обозначим через n_q наименьшее значение j, при котором $k_j\le q$.

ЛЕММА 1. Предположим, что $f(x)\in C^q[0,1]$ и удовлетворяет краевым условиям $V_j(y)=0$, $j=n_q,\ldots,n$. Тогда существует последовательность $\{y_m(x)\}_{m=1}^{\infty}$ такая, что 1) $y_m(x)\in C^n[0;1]$; 2) $V_j(y_m)=0$, $j=n_q,\ldots,n$; 3) $y_m(x)\to f(x)$ в пространстве $C^q[0,1]$.

Доказательство. Пусть $\{p_m(x)\}_{m=1}^{\infty}$ – последовательность алгебраических многочленов, сходящаяся к $f(x)$ в пространстве $C^q[0,1]$. Тогда $V_j(p_m)\to V_j(f)=0$ при $m\to\infty$, $j=n_q,\ldots,n$. То есть, $V_j(p_m)=o_m(1)$. Обозначим через $\{\psi_i(x)\}_{i=n_q}^{n}$ произвольный набор функций из $C^n[0,1]$, для

---

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 00-01-00075, и программы “Ведущие научные школы”, проект № 00-15-96123.

которых $U_j(\psi_i)=\delta_{ji}$ при $j\ge i$ (δ_{ji} – символ Кронекера). Очевидно, такие функции существуют. Действительно, пусть краевое условие $U_i(y)=0$ таково, что $a_{ik_i}\ne 0$, тогда в качестве $\psi_i(x)$ можно взять интерполяционный алгебраический многочлен, определяемый условиями $\psi_i^{(s)}(0)=0$, $s=0,1,...,k_i-1$, $\psi_i^{(k_i)}(0)=\dfrac{1}{a_{ik_i}}$; $\psi_i^{(s)}(1)=0$, $s=0,1,...,k_i$. Легко видеть, что при таком выборе $\psi_i(x)$ выполнены условия $U_j(\psi_i)=0$ при $j>i$, $U_i(\psi_i)=1$. Случай $a_{ik_i}=0$, $b_{ik_i}\ne 0$ рассматривается аналогично.

Обозначим через $h_\nu(x)\in C^n[0,1]$ $(\nu=1,2,...)$ функцию такую, что 1) $h_\nu(x)\equiv 1$ при $x\in[0,\frac{1}{2\nu}]\cup[1-\frac{1}{2\nu},1]$; 2) $h_\nu(x)=0$ при $x\in[\frac{1}{\nu},1-\frac{1}{\nu}]$; 3) $0\le h_\nu(x)\le 1$ при $x\in[\frac{1}{2\nu},\frac{1}{\nu}]\cup[1-\frac{1}{\nu},1-\frac{1}{2\nu}]$. Пусть $\psi_{i\nu}(x)=\psi_i(x)h_\nu(x)$. Очевидно, $(\psi_{i\nu},\varphi_j)=o_\nu(1)$ при $\nu\to\infty$, $U_j(\psi_{i\nu})=U_j(\psi_i)$. Поэтому $V_j(\psi_{i\nu})=U_j(\psi_{i\nu})+o_\nu(1)$ при $\nu\to\infty$. Будем искать требуемую последовательность в виде $y_m(x)=p_m(x)-\sum\limits_{i=n_q}^{n}C_i^{(m)}\psi_{i\nu}(x)$, где ν выберем позднее.

Для определения $C_i^{(m)}$ получаем систему уравнений

$$V_j(y_m)=V_j(p_m)-\sum_{i=n_q}^{n}C_i^{(m)}(U_j(\psi_{i\nu})+o_\nu(1))=0,\quad j=n_q,...,n,\ \text{т.е.}$$

$$\sum_{i=n_q}^{n}C_i^{(m)}(U_j(\psi_{i\nu})+o_\nu(1))=V_j(p_m),\quad j=n_q,...,n. \qquad (2)$$

Матрица $\|U_j(\psi_{i\nu})\|_{j,i=n_q}^{n}$ является верхнетреугольной, на её главной диагонали стоят единицы. Следовательно, $\det\|U_j(\psi_{i\nu})\|_{j,i=n_q}^{n}=1$. А так как элементы матрицы системы (2) являются ограниченными по ν, то при ν достаточно больших определитель этой матрицы по модулю не меньше $\frac{1}{2}$. Выберем любое из таких ν и зафиксируем. Но тогда, так как $V_j(p_m)=o_m(1)$, то система (2) имеет единственное решение, причем $C_i^{(m)}=o_m(1)$. Отсюда, $y_m(x)\to f(x)$ в норме $C^q[0,1]$. Лемма доказана.

Обозначим $D_i=\{y(x)\in C^n[0,1]:V_j(y)=0,\ j=i,i+1,...,n\}$, $i=1,2,...,n_q$. Пусть далее $\overline{D_i}$ – замыкание D_i по норме $C^q[0,1]$.

ЛЕММА 2. При $i=2,...,n_q$ справедливы включения $D_i\subset\overline{D_{i-1}}$.

Доказательство. Предположим для определенности, что $a_{i-1k_{i-1}} \neq 0$. Пусть $f(x) \in D_i$. Построим последовательность $\{f_m(x)\}_{m=1}^{\infty} \subset D_{i-1}$, сходящуюся к $f(x)$ в $C^q[0,1]$. Положим $\psi_{i-1,m}(x) = \frac{(1-x)^{k_{i-1}+1} \sin^{k_{i-1}}(mx)}{k_{i-1}! m^{k_{i-1}}}$, $m = 1,2,\ldots$. Тогда $\psi^{(k_{i-1})}_{i-1,m}(0) = 1$, $\psi^{(k_{i-1})}_{i-1,m}(1) = 0$, $\psi^{(s)}_{i-1,m}(0) = \psi^{(s)}_{i-1,m}(1) = 0$, $s = 0,\ldots,k_{i-1}-1$, и, кроме того, $\psi_{i-1,m}(x) \to 0$ в $C^q[0,1]$.

Функции $\psi_s(x)$ $(s = i,\ldots,n)$ возьмем те же, что и в лемме 1. $\psi_{s\nu}(x) = \psi_s(x) h_\nu(x)$. Будем искать $f_m(x)$ в виде

$$f_m(x) = f(x) - C^{(m)}_{i-1} \psi_{i-1,m}(x) - \sum_{s=i}^{n} C^{(m)}_s \psi_{s\nu}(x). \tag{3}$$

Обозначим $V_{i-1}(f) = a$. Тогда для определения $C^{(m)}_s$ приходим к системе алгебраических уравнений

$$C^{(m)}_{i-1} V_l(\psi_{i-1,m}) + \sum_{s=i}^{n} C^{(m)}_s V_l(\psi_{s\nu}) = a\delta_{l,i-1}, \quad l = i-1,\ldots,n. \tag{4}$$

Но $V_{i-1}(\psi_{i-1,m}) = a_{i-1,k_{i-1}} + o_m(1)$. Поэтому матрица системы (4) имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} a_{i-1,k_{i-1}} + o_m(1) & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ o_m(1) & 1 + o_\nu(1) & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ o_m(1) & o_\nu(1) & \ldots\ldots & 1 + o_\nu(1) \end{pmatrix}.$$

Элементы этой матрицы, стоящие во $2,\ldots,n-i+1$ столбцах, не зависят от m и равномерно ограничены по ν, поэтому

$$\det A = a_{i-1,k_{i-1}} + o_m(1) + o_\nu(1). \tag{5}$$

Выберем ν настолько большим, чтобы в формуле (5) последнее слагаемое удовлетворяло условию $|o_\nu(1)| \leq \frac{|a_{i-1,k_{i-1}}|}{4}$ и зафиксируем. Но тогда при m достаточно больших $|\det A| \geq \frac{|a_{i-1,k_{i-1}}|}{2}$. Поэтому система (4) имеет единственное решение при m достаточно больших такое, что $C^{(m)}_{i-1} = O(1)$, $C^{(m)}_s = o_m(1)$, $s = i,\ldots,n$. С учетом формулы (3) получаем требуемое.

ТЕОРЕМА. Справедливо равенство $\overline{D_1} = D^0$, где D^0 – множество функций из $C^q[0,1]$, удовлетворяющих условиям $V_j(y) = 0$, $j = n_q,\ldots,n$.

Доказательство. Прежде всего, заметим, что D^0 замкнуто в $C^q[0,1]$, и, следовательно, $\overline{D_1} \subset D^0$. Пусть $f(x) \in D^0$. Для произвольного

$\varepsilon > 0$ в силу леммы 1 найдется функция $f_{n_q}(x) \in D_{n_q}$ такая, что $\| f - f_{n_q} \| < \varepsilon$ ($\| \cdot \|$ – норма в $C^q[0,1]$). Из леммы 2 следует, что существует система функций $\{f_i(x)\}_{i=2}^{n_q-1}$ такая, что $f_i(x) \in D_i$ и $\| f_i - f_{i-1} \| < \varepsilon$. Отсюда

$$\| f - f_1 \| \le \| f - f_{n_q} \| + \sum_{i=2}^{n_q} \| f_i - f_{i-1} \| < n_q \varepsilon .$$

Что и требовалось доказать.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. 2-е изд. М.: Наука, 1969.

2. *Хромов А. П.* Теорема равносходимости для интегродифференциальных и интегральных операторов // Матем. сб. 1981. Т. 114(156), № 3. С. 378 – 405.

УДК 517.984

О. Ю. Дмитриев

РАЗЛОЖЕНИЕ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

На отрезке [0,1] рассмотрим краевую задачу

$$y''' - \lambda y = 0, \tag{1}$$

$$\begin{aligned} U_1(y) &= a_{11}y(0) + y(1) = 0, \\ U_2(y) &= a_{21}y'(0) + a_{22}y(0) + y'(1) = 0, \\ U_3(y) &= a_{31}y''(0) + a_{32}y'(0) + a_{33}y(0) + y''(1) = 0, \end{aligned} \tag{2}$$

где a_{ij} – константы и λ – спектральный параметр.

В данной статье обобщается результат А. П. Хромова при $n = 3$ [1].

Если выполняются условия

$$\begin{aligned} & a_{11}a_{21} + a_{21}a_{31} + a_{31}a_{11} \neq 0, \\ & a_{11} + a_{21} + a_{31} = 0, \\ & a_{22} + a_{32} = 0, \\ & a_{33} = 0, \end{aligned} \tag{3}$$

то краевые условия (2) являются нерегулярными по Биркгофу [2, с. 66 – 67]. Функция Грина $G(x,t,\lambda)$ в таком случае имеет экспоненциальный рост при больших $|\lambda|$, причем как при $x < t$, так и при $x > t$. Основные трудности связаны с преодолением такого роста и их удается преодолеть за счёт использования специального функционального уравнения, которому должна удовлетворять разлагаемая функция.