$\varepsilon > 0$ в силу леммы 1 найдется функция $f_{n_q}(x) \in D_{n_q}$ такая, что $\| f - f_{n_q} \| < \varepsilon$ ($\| \cdot \|$ – норма в $C^q[0,1]$). Из леммы 2 следует, что существует система функций $\{f_i(x)\}_{i=2}^{n_q-1}$ такая, что $f_i(x) \in D_i$ и $\| f_i - f_{i-1} \| < \varepsilon$. Отсюда

$$\| f - f_1 \| \le \| f - f_{n_q} \| + \sum_{i=2}^{n_q} \| f_i - f_{i-1} \| < n_q \varepsilon .$$

Что и требовалось доказать.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. 2-е изд. М.: Наука, 1969.

2. *Хромов А. П.* Теорема равносходимости для интегродифференциальных и интегральных операторов // Матем. сб. 1981. Т. 114(156), № 3. С. 378 – 405.

УДК 517.984

О. Ю. Дмитриев

РАЗЛОЖЕНИЕ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

На отрезке [0,1] рассмотрим краевую задачу

$$y''' - \lambda y = 0, \tag{1}$$

$$\begin{aligned} &U_1(y) = a_{11} y(0) + y(1) = 0, \\ &U_2(y) = a_{21} y'(0) + a_{22} y(0) + y'(1) = 0, \\ &U_3(y) = a_{31} y''(0) + a_{32} y'(0) + a_{33} y(0) + y''(1) = 0, \end{aligned} \tag{2}$$

где a_{ij} – константы и λ – спектральный параметр.

В данной статье обобщается результат А. П. Хромова при $n = 3$ [1].

Если выполняются условия

$$\begin{aligned} &a_{11}a_{21} + a_{21}a_{31} + a_{31}a_{11} \ne 0, \\ &a_{11} + a_{21} + a_{31} = 0, \\ &a_{22} + a_{32} = 0, \\ &a_{33} = 0, \end{aligned} \tag{3}$$

то краевые условия (2) являются нерегулярными по Биркгофу [2, с. 66 – 67]. Функция Грина $G(x,t,\lambda)$ в таком случае имеет экспоненциальный рост при больших $|\lambda|$, причем как при $x < t$, так и при $x > t$. Основные трудности связаны с преодолением такого роста и их удается преодолеть за счёт использования специального функционального уравнения, которому должна удовлетворять разлагаемая функция.

Положим $\lambda=-\rho^3$ $\left(\arg\rho\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right]\right)$. Тогда $y_j(x)=y_j(x,\rho)=$ $=\exp\rho\omega_j x$, где $\omega_j=\exp\left(\frac{2j-1}{3}\pi i\right)$, $j=\overline{1,3}$, образуют фундаментальную систему решений уравнения (1). Для собственных чисел λ_k справедливы асимптотические формулы: $\lambda_k=-\rho_k^3$, $\rho_k=\rho_{k+h}^0+O\left(\frac{1}{k}\right)$, $\rho_k^0=\frac{(2k+1)\pi}{2\sin\frac{\pi}{3}}$, где h – некоторое целое число, не зависящее от k. При этом все собственные значения, начиная с некоторого, простые.

Обозначим

$$\varphi_1(x,\rho)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3\\ U_{21} & U_{22} & U_{23}\\ U_{31} & U_{32} & U_{33}\end{vmatrix},\qquad \varphi_2(x,\rho)=\begin{vmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13}\\ y_1 & y_2 & y_3\\ U_{31} & U_{32} & U_{33}\end{vmatrix},$$

$$\varphi_3(x,\rho)=\begin{vmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13}\\ U_{21} & U_{22} & U_{23}\\ y_1 & y_2 & y_3\end{vmatrix},$$

где $U_{ij}=U_i(y_j)$.

$\varphi(x,\rho)=\alpha\varphi_1(x,\rho)+\beta\varphi_2(x,\rho)+\gamma\varphi_3(x,\rho)$, где α,β,γ – некоторое число. Если $\rho=\rho_k$, то $\varphi(x,\rho_k)$ будет собственной функцией.

Имеем

$$\varphi(x,\rho_k)=\begin{cases} O(\rho_k^3\exp(\rho_k\omega_2 x+\rho_k\omega_3)), & x\in\left[0,\frac{1}{3}\right],\\ O(\rho_k^3\exp(\rho_k\omega_1 x)), & x\in\left[\frac{1}{3},1\right].\end{cases}\qquad(4)$$

Если z – комплексное, то справедлива оценка

$$\varphi(z,\rho_k)=O\left(|\rho_k^3|\{|\exp(\rho_k\omega_1 z)|+|\exp(\rho_k\omega_2 z+\rho_k\omega_3)|+|\exp(\rho_k\omega_3 z)|\}\right).\qquad(5)$$

Если $x\in\left[0,\frac{1}{3}\right)$ и фиксировано, то

$$|\varphi(x,\rho_k)|\geq C|\rho_k^3||\exp(\rho_k\omega_2 x+\rho_k\omega_3)|.\qquad(6)$$

Если $x\in[\alpha,\beta]$, где $\frac{1}{3}<\alpha<\beta\leq 1$, то для каждого достаточно большого $|\rho_k|$ найдется $x_k\in[\alpha,\beta]$ такое, что

$$|\varphi(x_k,\rho_k)|\geq C|\rho_k^3||\exp(\rho_k\omega_1 x_k)|.\qquad(7)$$

Обозначим T_x $\left(x>\frac{1}{3}\right)$ правильный треугольник в комплексной плоскости с центром в точке $\frac{1}{3}$ и одной из вершин в точке x.

Перейдем теперь к необходимым условиям равномерной сходимости рядов по собственным и присоединенным функциям (с.п.ф.).

ТЕОРЕМА 1. Если ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \varphi(x, \rho_k) \tag{8}$$

сходится в точке $x = \alpha$, где $\alpha \in \left[0; \frac{1}{3}\right)$, то он сходится абсолютно и равномерно внутри $T_{1-2\alpha}$ к аналитической функции. Если он сходится равномерно на $[\alpha, \beta]$, где $\frac{1}{3} < \alpha < \beta \le 1$, то он сходится абсолютно и равномерно в T_α к аналитической функции. Сумма f ряда (8) удовлетворяет функциональному уравнению

$$\Phi(f, x) = b_{11} f(\overline{\omega}_1 x) + b_{31} f(\overline{\omega}_3 x) + b_{12} \int_{1/3}^{\overline{\omega}_1 x} f(z)dz + b_{32} \int_{1/3}^{\overline{\omega}_3 x} f(z)dz +$$
$$+ 3f(1-x) = 0, \tag{9}$$

где $b_{11} = a_{11} - \omega_1 a_{21} + \omega_1^2 a_{31}$, $b_{31} = a_{11} - \omega_3 a_{21} + \omega_3^2 a_{31}$, $b_{12} = -\omega_1 a_{22} + \omega_1^2 a_{32}$, $b_{32} = -\omega_3 a_{22} + \omega_3^2 a_{32}$.

ТЕОРЕМА 2. Если ряд (8) сходится равномерно на $[0,1]$, f – его сумма и μ не является собственным значением, то функция $g(x) = R_\mu f = \int_0^1 G(x,t,\mu) f(t)dt$ аналитически продолжима в T_1, ограничена в угле $|\arg z| \le \frac{\pi}{3}$, $|z| \le |z_0|$ и удовлетворяет уравнению (9). В заключение сформулируем теорему о разложении.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $f(x) \in L[0,1]$ и при некотором натуральном κ функция $g(x) = R_\mu^\kappa f$ удовлетворяет следующим условиям:

а) аналитически продолжима в четырехугольник $\widetilde{T}_1$ с вершинами $0, \dfrac{\omega_1}{2}, 1, \dfrac{\omega_3}{2}$;

б) непрерывна на интервалах $\left(0; \frac{\omega_1}{2}\right)$, $\left(0; \frac{\omega_3}{2}\right)$;

в) ограничена в угле $|\arg z| \le \frac{\pi}{3}$, $|z| \le z_0$;

г) при $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ удовлетворяет уравнению (9).

Тогда $f(x)$ разлагается в равномерно сходящийся на $(0,1)$ ряд Фурье по с.п.ф. краевой задачи (1), (2).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Хромов А. П.* Разложение по собственным функциям одной краевой задачи третьего порядка // Математика и её приложения. Саратов, 1991.

2. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. М., 1969.