УДК 517.54

Г. Н. Камышова

НЕКОТОРЫЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ ЁМКОСТИ РОБЕНА*

Задачи, связанные с исследованием свойств ёмкостей различных множеств, занимают важное место среди экстремальных задач геометрической теории функций. При этом, в силу конформной инвариантности ёмкости, большое внимание уделяется подмножествам единичной окружности.

В [1] П. Дюреном и М. Шиффером был определен инвариант, названный ёмкостью Робена $\delta(A)$ множества, который обобщал понятие логарифмической емкости $d(A)$. Для определения воспользуемся описанием $\delta(A)$ и $d(A)$ в терминах экстремальной длины [2]. Пусть Γ – семейство локально спрямляемых кривых в области Ω. Измеримая по Борелю функция $\rho(z)\geq 0$, удовлетворяющая для всех $\gamma\in\Gamma$ неравенству $\int\limits_{\gamma}\rho(z)\,|\,dz\,|\geq 1$, называется допустимой метрикой для Γ. Тогда экстремальная длина $\lambda(\Gamma)$ семейства кривых Γ определяется следующим образом:

$$\frac{1}{\lambda(\Gamma)}=\inf_{\rho}\iint\limits_{\Omega}\rho^2(z)dxdy, \qquad z=x+iy. \tag{1}$$

Обозначим через $\lambda_{\Omega}(C,D)$ экстремальное расстояние между связными подмножествами C и D границы Ω, которое определяется как экстремальная длина семейства кривых Γ, соединяющих C и D в Ω. Пусть границей $\partial\Omega=A$ области $\Omega\subset\overline{C},\infty\in\Omega$ является аналитическая жорданова кривая, окружность $C_r=\{z:|\,z\,|=r\}$ содержит внутри $\partial\Omega$. Обозначим через Ω_r часть Ω, лежащую внутри C_r. Тогда логарифмическая ёмкость $d(A;\Omega)$ множества A относительно Ω определяется формулой

$$d(A;\Omega)=e^{-\gamma(A)}, \qquad \gamma(A)=\lim_{r\to\infty}(2\pi\lambda_{\Omega_r}(A,C_r)-\log r). \tag{2}$$

Если $\partial\Omega=A\cup B$, $\quad A\cap B=\varnothing$, то ёмкость Робена $\delta(A;\Omega)$ множества A относительно Ω равна

$$\delta(A;\Omega)=e^{-\rho(A)}, \qquad \rho(A)=\lim_{r\to\infty}(2\pi\lambda_{\Omega_r}(A,C_r)-\log r). \tag{3}$$

Экстремальные задачи об оценках логарифмической ёмкости для подмножеств единичной окружности рассматривались в работах А. Бейрлинга, К. Померенке, В. Дубинина, А. Солынина (см., например, [3]). В экстремальных задачах такого рода зачастую возникает вопрос о поведе-

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 01-01-00123, INTAS, грант № 99-00089.

нии ёмкости при переходе от не симметричной области к области, обладающей тем или иным видом симметрии.

В представленной статье исследуется изменение ёмкости Робена дуги окружности в случае не симметричной области.

Пусть Ω есть внешность единичного круга, $\partial\Omega = A \cup B$. Хорошо известно, что ёмкость Робена дуги окружности, опирающейся на угол α $\delta(A;\Omega) = \sin^2\frac{\alpha}{4}$ и она не зависит от положения дуги. Ситуация существенно меняется, если область Ω не симметрична. Мы рассмотрим простой, но в то же время весьма важный случай не симметричности области Ω.

Пусть Ω есть внешность единичного круга с радиальным разрезом, составляющим угол Θ с положительным направлением действительной оси. $\Omega = \{z : |z| > 1\} \setminus [0; r \cdot e^{i\Theta}]$, $r > 1$. Пусть A дуга окружности, опирающаяся на угол α.

Без ограничения общности будем считать, что $A = e^{i\beta}, \pi - \alpha < \beta < \pi$. Отобразим Ω на внешность единичного круга с помощью функции

$$F = \psi + \sqrt{\psi^2 - 1},\ \psi = \left(ze^{-i\Theta} + \frac{1}{z}e^{i\Theta} - R + 1\right)\cdot\frac{1}{R+1}, \qquad R = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right), \tag{4}$$

$$F(\infty) = \infty.$$

При этом дуга A переходит в дугу, соответствующую центральному углу φ. Используя известную формулу и конформную инвариантность ёмкости Робена, получим

$$\delta(A;\Omega) = C \cdot \sin^2\frac{\varphi}{4}, \tag{5}$$

где

$$C = \frac{2}{R+1}, \qquad \varphi = arctg\left(\frac{\dfrac{\sqrt{1-l_1^2}}{l_1} - \dfrac{\sqrt{1-l_2^2}}{l_2}}{1 + \dfrac{\sqrt{1-l_1^2}}{l_1}\cdot\dfrac{\sqrt{1-l_2^2}}{l_2}}\right), \tag{6}$$

$$l_1 = -\left(\cos\Theta + \frac{R-1}{2}\right)\frac{2}{R+1}, \qquad l_2 = -\left(\cos(\Theta+\alpha) + \frac{R-1}{2}\right)\frac{2}{R+1}. \tag{7}$$

Отсюда следует, что ёмкость Робена A – $\delta(A;\Omega)$ зависит от положения разреза, то есть от угла Θ.

Рассмотрим ёмкость Робена $\delta(A;\Omega)$, заданную формулой (5), как функцию угла Θ при фиксированном значении α. $\delta(A;\Omega) = \delta(\Theta)$. Изучая эту функцию, получим следующую теорему.

ТЕОРЕМА. Если $0<\alpha<\pi$, то для $\Theta\in\left(-\pi-\frac{\alpha}{2};\quad \frac{-\alpha}{2}\right)$ ёмкость Робена $\delta(A;\Omega)$ монотонно возрастает, а для $\Theta\in\left(-\frac{\alpha}{2};\quad \pi-\frac{\alpha}{2}\right)$ – монотонно убывает и справедливы следующие оценки:

$$1-\frac{2(3-R)\cdot\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\frac{R-1}{2}\right)+4\sqrt{2(R-1)\cdot(R+(R-1)\cos\frac{\alpha}{2}-\cos^2\frac{\alpha}{2})}}{(R+1)^2}\le$$

$$\le\delta(A;\Omega)\le\frac{1-\cos\frac{\alpha}{2}}{R+1}.$$

Если $\pi<\alpha<2\pi$, то для $\Theta\in\left(-\pi-\frac{\alpha}{2};\quad \frac{-\alpha}{2}\right)$ ёмкость Робена $\delta(A;\Omega)$ монотонно убывает, а для $\Theta\in\left(-\frac{\alpha}{2};\quad \pi-\frac{\alpha}{2}\right)$ – монотонно возрастает, и справедливы оценки, аналогичные предыдущим.

В заключение заметим, что при $R\to 1$ неравенства обращаются в точные равенства.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Duren P., Schiffer M. Robin functions and energy functionals of multiply connected domains // Pacific J. Math. 1991.Vol. 148. P. 251 – 273.

2. Duren P., Pfaltzgraff J. Robin capacity and extremal length // J. Math. Anal. Appl. 1993. Vol. 17. P. 110 – 119.

3. Дубинин В.Н. Симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного // Успехи матем. наук. 1994. Т. 49. №1. С. 1 – 76.

УДК 681.3

А. Д. Ковалев, В. В. Мозжилкин

ОПЕРАТИВНАЯ РЕОРГАНИЗАЦИЯ БАЗ ДАННЫХ

Сопровождение приложения баз данных, функционирующего в локальной вычислительной сети, связано, с одной стороны, с установкой обновленной версии приложения на автоматизированных рабочих местах пользователей (что не является проблемой) и, с другой стороны, с необходимостью реорганизации общих баз данных, размещаемых на сервере. Необходимость реорганизации может быть связана с расширением, изменением или уточнением схем баз данных, модификаций правил целостности, оптимизацией наборов индексов и т.п. При этом в результате смены поколения информационное содержание баз данных должно быть наследовано