2. *Корнев В. В., Хромов А. П.* О равносходимости спектральных разложений одного класса интегральных операторов // Современные методы в теории краевых задач: Тез. докл. 11-й Воронежской весенней школы. Воронеж, 2000. С. 89.

3. *Курдюмов В. П.* О базисности Рисса корневых векторов интегральных операторов с разрывными ядрами // Современные проблемы теории функций и их приложения: Тез. докл. 9-й Саратовской зимней школы. Саратов, 1997. С. 96.

4. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Введение в теорию несамосопряженных операторов. М., 1965.

УДК 517.948.34

Ю. В. Курышова

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ПО НЕПОЛНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ИНФОРМАЦИИ*

Пусть числа $\{\lambda_{ni}\}_{n=1}^{\infty}$ являются собственными значениями краевых задач $L_i = L_i(q,M)$:

$$\ell y \equiv -y'' + q(x)y + \int_0^x M(x,t)y(t)dt = \lambda y, \tag{1}$$

$$y(0) = y^{(i-1)}(\pi) = 0. \tag{2i}$$

Здесь $x \in [0,\pi]$, $i = 1,2$, $q(x) \in \mathbf{L}_2(0,\pi)$, $M(x,t) \in \mathbf{L}(0,\pi)\times(0,x)$ – вещественные функции. В статье исследуется задача восстановления функции q по части спектров задач L_i. Не ограничивая общности, считаем $\int_0^\pi q(x)dx = 0$.

Пусть $S(x,\lambda)$ есть решение уравнения (1) с начальными условиями $S(0,\lambda) = 0$, $S'(0,\lambda) = 1$, а $S^*(x,\lambda)$, $C^*(x,\lambda)$ – решения уравнения сопряжённого к (1) с начальными условиями $S^*(\pi,\lambda) = 0$, $S^{*'}(\pi,\lambda) = -1$ и $C^*(\pi,\lambda) = 1$, $C^{*'}(\pi,\lambda) = 0$.

Введём функции $\{\xi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ по следующим формулам:
$\xi_{2n}(x) = 1 - 2\lambda_{n1}b_{n1}^{-1}S^*(x,\lambda_{n1})S\ (x,\lambda_{n1})$, $\xi_{2n-1}(x) = 1 - 2\lambda_{n2}b_{n2}^{-1}C^*(x,\lambda_{n2})S(x,\lambda_{n2})$, где числа b_{ni} определяются соотношениями $b_{n1}S^0(x,\mu_{n1}) = S^{0*}(x,\mu_{n1})$, $b_{n2}S^0(x,\mu_{n2}) = C^{0*}(x,\mu_{n2})$. Функции S^0, S^{0*}, C^{0*} задаются аналогично функ-

---

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 00-01-00-741.

циям S, S^*, C^*, но для уравнений с $M(x,t)\equiv 0$, а $\{\mu_{ni}\}_{n=1}^{\infty}$ собственные значения задач $L_i^0 = L_i(q,0)$. Введём систему функций $\{\zeta_n^N(x)\}_{n=0}^{\infty}$ такую, что $\zeta_n^N(x) := \xi_n(x)$, если $n \ge N$, и $\zeta_n^N(x) := \cos nx$, если $n = \overline{0, N-1}$.

ЛЕММА. Существует натуральное число $N_0 = N_0(\ell)$ такое, что при $N \ge N_0$ система функций $\{\zeta_n^N(x)\}_{n=0}^{\infty}$ является базисом Riesz в $L_2[0,\pi]$.

ТЕОРЕМА. Выберем натуральное N из леммы, для неопределённости нечётное. Тогда найдётся число $\delta = \delta(L_i(q,M)) > 0$ такое, что для чисел $\{\widetilde{\lambda}_{ni}\}_{n=\frac{N+1}{2}}^{\infty}$ и $\{d_k\}_{k=1}^{N-1}$, $d_0 = 0$, выбранных из условия

$$\Lambda(N) := \left(\sum_{k=1}^{N-1} |d_k|^2 + \sum_{n=\frac{N+1}{2}}^{\infty} |\hat{\kappa}_{n1}|^2 + |\hat{\kappa}_{n2}|^2 \right)^{1/2} < \delta, \tag{3}$$

где $\hat{\kappa}_{ni} = n(\rho_{ni} - \widetilde{\rho}_{ni})$, $\lambda_{ni} = \rho_{ni}^2$, в шаре $S(q, 2\delta)$ из $\mathbf{L}_2(0,\pi)$ существует единственная функция $\widetilde{q}(x)$ такая, что числа $\{\widetilde{\lambda}_{ni}\}_{n=\frac{N+1}{2}}^{\infty}$ являются собственными значениями задач $L_i(\widetilde{q}, M)$, причём $\|\widetilde{q} - q\|_{\mathbf{L}_2} < C\Lambda(N)$ (константа C зависит лишь от задач L_i) и

$$\int_0^{\pi} (q(x) - \widetilde{q}(x)) \cos nx dx = d_n,\ n = \overline{0, N-1}. \tag{4}$$

С х е м а д о к а з а т е л ь с т в а. Рассмотрим систему функций

$$\widetilde{\zeta}_n^N(x) := \begin{cases} \widetilde{\xi}_n(x), & n \ge N, \\ \cos nx, & n = \overline{0, N} - 1, \end{cases}$$

где функции $\{\widetilde{\xi}_n(x)\}_0^{\infty}$ определяются равенствами

$\widetilde{\xi}_{2n}(x) = 1 - 2\widetilde{\lambda}_{n1} b_{n1}^{-1} S^*(x, \widetilde{\lambda}_{n1}) S(x, \widetilde{\lambda}_{n1}), \widetilde{\xi}_{2n-1}(x) = 1 - 2\widetilde{\lambda}_{n2} b_{n2}^{-1} C^*(x, \widetilde{\lambda}_{n2}) S(x, \widetilde{\lambda}_{n2})$.

Существует $\delta > 0$ такое, что если $\{\widetilde{\lambda}_{ni}\}_{n=\frac{N+1}{2}}^{\infty}$ и $\{d_k\}_{k=1}^{N-1}$ выбраны из условия (3), то система функций $\{\widetilde{\zeta}_n^N(x)\}_0^{\infty}$ есть базис Riesz в $L_2[0,\pi]$. Обозначим $\{\widetilde{\psi}_n^N(x)\}_0^{\infty}$ биортогональный базис к $\{\overline{\widetilde{\zeta}}_n^N(x)\}_0^{\infty}$. Условимся для произвольной функции $F(x,\lambda)$ обозначать $F_{ni}(x) = F(x, \widetilde{\lambda}_{ni})$.

Рассмотрим в $\mathbf{L}_2(0,\pi)$ нелинейное интегральное уравнение

$$r(x) = f(x) + \sum_{j=2}^{\infty} \underbrace{\int_0^{\pi} \dots \int_0^{\pi}}_{j} H_j(x, t_1, \dots t_j) r(t_1) \dots r(t_j) dt_1 \dots dt_j, \tag{5}$$

где $f(x) = \sum_{n=0}^{N-1} d_n \widetilde{\psi}_n^N(x) - 2 \sum_{n=\frac{N+1}{2}}^{\infty} \left(\frac{\widetilde{\lambda}_{n1}}{b_{n1}} S_{n1}(\pi) \widetilde{\psi}_{2n}^N(x) + \frac{\widetilde{\lambda}_{n2}}{b_{n2}} S'_{n2}(\pi) \widetilde{\psi}_{2n-1}^N(x) \right)$,

$$H_j(x,t_1,\ldots,t_j) = -2\sum_{n=\frac{N+1}{2}}^{\infty}\left(\frac{\widetilde{\lambda}_{n1}}{b_{n1}}S^*_{n1}(t_1)G_{n1}(t_1,t_2)\ldots G_{n1}(t_{j-1},t_j)S_{n1}(t_j)\widetilde{\psi}^N_{2n}(x) + \right.$$

$$\left. + \frac{\widetilde{\lambda}_{n2}}{b_{n2}}C^*_{n2}(t_1)G_{n2}(t_1,t_2)\ldots G_{n2}(t_{j-1},t_j)S_{n2}(t_j)\widetilde{\psi}^N_{2n-1}(x)\right), \qquad j \ge 2,$$

$r(x)$ – неизвестная функция, $G(x,t,\lambda)$ – функция, при $0 \le t \le x \le \pi$ совпадающая с функцией Грина задачи Коши: $\ell y = \lambda y$, $y(0) = y'(0) = 0$, и равная нулю при $0 \le x \le t \le \pi$; $G_{ni}(x,t) := G(x,t,\widetilde{\lambda}_{ni})$.

Справедливы оценки $\|f(x)\|_2 < C\Lambda(N)$; $\|H_j(x,t_1,\ldots,t_j)\|_2 < C_0^j, (j \ge 2)$, где $\|\cdot\|_2$ – норма в $\mathbf{L}_2$ берётся по всем аргументам, а постоянные C, C_0, зависят только от задач $L_i(q,M)$. Можно показать, что если $\Lambda < \delta$, то уравнение (5) имеет единственное решение $r(x)$ в шаре $\| r \| < 2\delta$ из $\mathbf{L}_2[0,\pi]$, причём $\| r(x) \| < 2 \| f(x) \|$. Обозначим $\widetilde{q}(x) := q(x) - r(x)$. Покажем, что числа $\{\widetilde{\lambda}_{ni}\}_{n=\frac{N+1}{2}}^{\infty}$ составляют часть спектров задач $L_i(\widetilde{q},M)$, $i = 1, 2$. С этой целью рассмотрим уравнение

$$\widetilde{y}_{ni}(x) = S_{ni}(x) - \int_0^{\pi} G_{ni}(x,t) r(t) \widetilde{y}_{ni}(t)dt. \tag{6}$$

Решим его методом последовательных приближений, получим

$$\widetilde{y}_{ni}(x) = S_{ni}(x) - \varphi_{ni}(x), \tag{7}$$

где $$\varphi_{ni}(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \underbrace{\int_0^{\pi}\ldots\int_0^{\pi}}_{j} G_{ni}(x,t_1)\ldots G_{ni}(x,t_j) r(t_1)\ldots r(t_j)dt_1\ldots dt_j.$$

Из равенства (5) можно получить

$$\widetilde{\ell}\widetilde{y}_{ni}(x) \equiv -\widetilde{y}''_{ni}(x) + \widetilde{q}(x)\widetilde{y}_{ni}(x) + \int_0^x M(x,t)\widetilde{y}_{ni}(t)dt = \widetilde{\lambda}_{ni}\widetilde{y}_{ni}(x), \quad \widetilde{y}_{ni}(0) = 0, \widetilde{y}'_{ni}(0) = 1. \tag{8}$$

Используя (8), получим

$$\int_0^{\pi} r(x)S^*_{n1}(x)\widetilde{S}_{n1}(x)dx = S_{n1}(\pi) - \widetilde{y}_{n1}(\pi), \int_0^{\pi} r(x)C^*_{n2}(x)\widetilde{S}_{n2}(x)dx = S'_{n2}(\pi) - \widetilde{y}_{n2}(\pi). \tag{9}$$

Обозначим $\int_0^{\pi} r(x)dx = \theta$. Умножая тождество (5) на $\widetilde{\psi}^N_n(x)$, интегрируя его по x от 0 до π, и учитывая при этом формулы (7), получим

$$\int_0^\pi r(x)S^*_{n1}(x)\widetilde{S}_{n1}(x)dx \equiv S_{n1}(\pi)-\theta, \quad \int_0^\pi r(x)C^*_{n2}(x)\widetilde{S}_{n2}(x)dx \equiv S'_{n2}(\pi)-\theta. \quad (10)$$

Сравнивая (9) и (10), имеем для $n \geq (N+1)/2$

$$\widetilde{y}_{n1}(\pi)=\theta, \quad \widetilde{y}'_{n2}(\pi)=\theta, \quad (11)$$

а для $n=\overline{0,N-1}$, — равенства (4).

Имеет место оценка $\left|\widetilde{y}_{n1}(x)\right| < Cn^{-2}$, следовательно, из (11) при $n\to\infty$ получим $\theta=0$, отсюда $\int_0^\pi \widetilde{q}(x)dx=0$, и $\widetilde{y}_{n1}(\pi)=0$, $\widetilde{y}'_{n2}(\pi)=0$. Таким образом, числа $\{\widetilde{\lambda}_{ni}\}_{n=\frac{N+1}{2}}^\infty$ составляют часть спектра задач $\widetilde{L}_i$, причём имеют место равенства (4). Теорема доказана.

УДК 517.984

Д. С. Лукомский

О ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ РАЗРЕШИМОСТИ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПУЧКОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ*

Рассмотрим пару $L=(l,U)$, $U=\{U_\xi\}_{\xi=\overline{1,n}}$:

$$ly \equiv y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-2} P_k(x,\rho)y^{(k)}=0, \quad P_k(x,\rho)=\sum_{i=k}^{n}\rho^{n-i}P_{ki}(x), \quad x\geq 0, \quad (1)$$

$$U_\xi(y)=y^{(n-\xi)}(0)+\sum_{k=1}^{n-\xi}u_{k\xi}(\rho)y^{(n-k-\xi)}(0), \quad u_{k\xi}(\rho)=\sum_{i=0}^{k}\rho^{k-i}\beta^{(\xi)}_{k,k+i}.$$

Здесь $P_{kk}=0$, $k=\overline{1,n-2}$, $P_{00}=-1$, $P_{ki}(x)\in L(0,\infty)$, $P_{k,k+1}(x)\in W^1(0,\infty)$, $k=\overline{0,n-2}$, $i=\overline{k+1,n}$.

Известно, что ρ-плоскость можно разбить на сектора $S_\nu=\left\{\rho:\arg\rho\in\left(\nu\pi/n, (\nu+1)\pi/n\right)\right\}$ $\nu=\overline{0,2n-1}$, в каждом из которых корни $\{R_k\}_{k=\overline{1,n}}$ уравнения $R^n-1=0$ можно занумеровать так, что

$$\mathrm{Re}(\rho R_1)<\mathrm{Re}(\rho R_2)<\ldots<\mathrm{Re}(\rho R_n), \quad \rho\in S_\nu. \quad (2)$$

---

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 00-01-00741.