$$\int_0^\pi r(x)S_{n1}^*(x)\widetilde{S}_{n1}(x)dx \equiv S_{n1}(\pi)-\theta, \quad \int_0^\pi r(x)C_{n2}^*(x)\widetilde{S}_{n2}(x)dx \equiv S'_{n2}(\pi)-\theta. \quad (10)$$

Сравнивая (9) и (10), имеем для $n \geq (N+1)/2$

$$\widetilde{y}_{n1}(\pi)=\theta, \quad \widetilde{y}'_{n2}(\pi)=\theta, \qquad (11)$$

а для $n=\overline{0,N-1}$, — равенства (4).

Имеет место оценка $\left|\widetilde{y}_{n1}(x)\right| < Cn^{-2}$, следовательно, из (11) при $n\to\infty$ получим $\theta=0$, отсюда $\int_0^\pi \widetilde{q}(x)dx=0$, и $\widetilde{y}_{n1}(\pi)=0$, $\widetilde{y}'_{n2}(\pi)=0$. Таким образом, числа $\{\widetilde{\lambda}_{ni}\}_{n=\frac{N+1}{2}}^{\infty}$ составляют часть спектра задач $\widetilde{L}_i$, причём имеют место равенства (4). Теорема доказана.

УДК 517.984

Д. С. Лукомский

О ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ РАЗРЕШИМОСТИ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПУЧКОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ*

Рассмотрим пару $L=(l,U)$, $U=\{U_\xi\}_{\xi=\overline{1,n}}$:

$$ly \equiv y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-2} P_k(x,\rho)y^{(k)}=0, \quad P_k(x,\rho)=\sum_{i=k}^{n}\rho^{n-i}P_{ki}(x), \quad x\geq 0, \qquad (1)$$

$$U_\xi(y)=y^{(n-\xi)}(0)+\sum_{k=1}^{n-\xi}u_{k\xi}(\rho)y^{(n-k-\xi)}(0), \quad u_{k\xi}(\rho)=\sum_{i=0}^{k}\rho^{k-i}\beta_{k,k+i}^{(\xi)}.$$

Здесь $P_{kk}=0$, $k=\overline{1,n-2}$, $P_{00}=-1$, $P_{ki}(x)\in L(0,\infty)$, $P_{k,k+1}(x)\in W^1(0,\infty)$, $k=\overline{0,n-2}$, $i=\overline{k+1,n}$.

Известно, что ρ-плоскость можно разбить на сектора $S_\nu=\left\{\rho : \arg\rho \in \left(\nu\pi/n, (\nu+1)\pi/n\right)\right\}$ $\nu=\overline{0,2n-1}$, в каждом из которых корни $\{R_k\}_{k=\overline{1,n}}$ уравнения $R^n-1=0$ можно занумеровать так, что

$$\operatorname{Re}(\rho R_1) < \operatorname{Re}(\rho R_2) < \ldots < \operatorname{Re}(\rho R_n), \quad \rho\in S_\nu. \qquad (2)$$

---

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 00-01-00741.

Пусть функции $\Phi(x,\rho)=[\Phi_m(x,\rho)]^T_{m=\overline{1,n}}$ являются решениями дифференциального уравнения (1) при условиях $U_\xi(\Phi_m)=\delta_{\xi m}$, $\xi=\overline{1,m}$, а также $\Phi_m(x,\rho)=O(\exp(\rho R_m x))$, $x\to\infty$, $\rho\in S_\nu$, в каждом секторе S_ν со свойством (2). Обозначим $M_{mk}(\rho)=U_k(\Phi_m)$, $k=\overline{m+1,n}$. Функции $\Phi_m(x,\rho)$ называются решениями Вейля, а функции $M_{mk}(\rho)$ – функциями Вейля. Матрица $M(\rho)=[M_{mk}(\rho)]_{k,m=\overline{1,n}}$, где $M_{mk}(\rho)=\delta_{mk}$, $k=\overline{1,m}$ называется матрицей Вейля.

Наряду с парой $L=(l,U)$ будем рассматривать пару $\widetilde{L}=(\widetilde{l},\widetilde{U})$ того же вида, но с другими коэффициентами. Договоримся, что если некоторый символ φ обозначает объект, относящийся к L, то символ $\widetilde{\varphi}$ обозначает аналогичный объект, относящийся к $\widetilde{L}$.

Поставим задачу следующим образом: по матрице Вейля $M(\rho)$ восстановить L.

Обозначим $\Omega(x,\rho)=diag[\,{}^{1}\!/\!_{\rho}\exp(\rho R_k x)]_{k=\overline{2,n}}$, $r(\rho)={}^{1}\!/\!_{\rho^{n-1}}$.

$$\gamma``=\left\{\rho:\rho\in\bigcup_{\nu=0}^{2n-1}\gamma_\gamma,\quad d(\rho,\gamma_0)\ge\alpha_0>0\right\},\ \gamma`=\gamma/\gamma``,\ d(\rho,\gamma_0)=\inf|\rho-\mu|,\ \mu\in\gamma_0;$$

где γ_ν, $\gamma_{\nu+1}$ – лучи, ограничивающие сектор S_ν, γ_0, γ, определены в [1].

Введем банахово пространство $B=L_2^{n-1}(\gamma`,r(\rho))\ \oplus\ L_\infty^{n-1}(\gamma``,r(\rho))$ вектор функций $Z(\rho)=[z_j(\rho)]_{j=\overline{1,n-1}}$, $\rho\in\gamma$ с нормой

$$\|Z\|_B=\sum_{j=1}^{n-1}\left(\|z_j\|_{L_2(\gamma`,r(\rho))}+\|z_j\|_{L_\infty(\gamma``,r(\rho))}\right);$$

$$\widetilde{N}(x,\rho,\mu)=\left(\sum_{m=0}^{n-1}\widetilde{g}^{*(m)}(x,\mu)\sum_{s=m}^{n-1}(-1)^s C_s^m\sum_{i=s}^{n-1}\widetilde{P}_{si}^{(s-m)}(x)*\right.$$
$$\left.*\sum_{t=0}^{n-i-1}\mu^{n-i-t-1}\rho^t\right)^{(j-k-l-1)},$$

$$\kappa_{vs}(x,\rho)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma(\widetilde{g}^*(x,\mu)\widetilde{N}(x,\rho,\mu))^{(\nu)}\psi^{(s)}(x,\mu)d\mu,\quad \nu+s\le n-1,$$

$$\left.\begin{aligned}t_{j\nu}(x,\rho)&=-\sum_{\beta=\nu+1}C_j^\beta C_{\beta-1}^\nu\kappa_{\beta-\nu-1,j-\beta}(x,\rho)\quad j>\nu\\ t_{j\nu}(x,\rho)&=\delta_{j\nu},\quad j\le\nu,\quad j,\nu=\overline{0,n},\end{aligned}\right\},$$

$$\varepsilon_\nu(x,\rho)=-\sum_{j=\nu+1}^{n}\left(t_{j\nu}(x,\rho)\sum_{k=j}^{n}C_k^jP_k(x,\rho)\frac{V^{(k-j)}(x)}{V(x)}+\right.$$

$$+C_j^{\nu}P_j(x,\rho)\frac{V^{(j-\nu)}(x)}{V(x)}\Bigg),\quad \nu=\overline{0,n-1}, \tag{3}$$

где $V(x)$, $\widetilde{g}^*(x,\rho)$, $\psi(x,\rho)$ определены в [1]. Кроме того, в дальнейшем будут использоваться обозначения $\widetilde{\varphi}(x,\rho)$, $\widetilde{N}(\rho)$, $\widetilde{r}(x,\rho,\mu)$, также введенные в [1].

Обозначим через $m-$ множество матриц $M(\rho)=[M_{mk}(\rho)]_{m,k=\overline{1,n}}$ таких, что

1) $M_{mk}(\rho)=\delta_{mk}$, при $m\geq k$, и $M_{mk}(\rho)=O\left(\frac{1}{\rho^{k-m}}\right), |\rho|\to\infty, m<k$;

2) при фиксированном ν функция $M_{mk}(\rho)$, является регулярной в $S_\nu\cup S_{\nu+(-1)^{n+\nu-m+1}}$ за исключением не более, чем счетного ограниченного множества полюсов $\Lambda^{\nu}{}_{mk}$. За исключением ограниченных множеств $\Lambda^{+}_{S_\nu}$ и $\Lambda^{-}_{S_\nu}$ существуют конечные пределы $M(\rho)^{+S_\nu}$ и $M(\rho)^{-S_\nu}$ к лучам, ограничивающим объединение двух секторов;

3) при фиксированном ν функции $M_{mk}(\rho)-M_{m,m+1}(\rho)M_{m+1,k}(\rho)$, регулярны при $\rho\in\gamma_{\nu+\frac{(-1)^{n+\nu-m}+1}{2}}/\Lambda$, $\Lambda=\cup_{m,k}\Lambda^{\nu}_{mk}$ (множество Λ своё для каждой матрицы $M(\rho)$).

ТЕОРЕМА. Пусть матрица $M(\rho)\in m$ такая, что:

1) существует $\widetilde{L}$ такая, что $M(\rho)-\widetilde{M}(\rho)=O(\rho^{-n-2})$, $\rho\to\infty$;

2) при $x\geq 0$ уравнение

$$\widetilde{\varphi}(x,\rho)=\widetilde{N}(\rho)\psi(x,\rho)+\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\widetilde{r}(x,\rho,\mu)\psi(x,\mu)d\mu,\quad \rho\in\gamma$$

имеет единственное решение в классе $\Omega^{-1}(x,\rho)\varphi(x,\rho)\in B$;

3) $\varepsilon_\nu(x,\rho)\in W_\nu$, $\nu=\overline{0,n-2}$ при каждом фиксированном ρ, где функции $\varepsilon_\nu(x,\rho)$ определяются по формулам (3).

Тогда существует единственная $L=(l,U)$ такая, что $M(\rho)$ является матрицей Вейля для L.

При выполнении этих условий дифференциальное уравнение и линейные формы $L=(l,U)$ строятся по формулам

$$P_\nu(x,\rho)=\widetilde{P}(x,\rho)+\varepsilon_\nu(x,\rho),\quad \widetilde{u}_{n-\nu-\zeta,\zeta}(\rho)=\sum_{j=0}^{n}\breve{u}_{j\zeta}(\rho)t_{j\nu}(0,\rho),$$

где $\breve{u}_{i\zeta}(\rho)=\sum_{k=0}^{n-i-\zeta}u_{k\zeta}(\rho)C^{i}_{n-k-\zeta}V^{(n-k-i-\zeta)}(0)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лукомский Д. С.* Об обратной спектральной задаче для дифференциальных операторов с нелинейной зависимостью от спектрального параметра // Математика, механика, математическая кибернетика. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1999. С. 54 – 57.

УДК 517.51

С. Ф. Лукомский

О СХОДИМОСТИ КРАТНЫХ РЯДОВ УОЛША В ПРОСТРАНСТВАХ, БЛИЗКИХ К L^{∞}*

Пусть $\{W_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ – система функций Уолша в нумерации Пэли, определенная на двоичной группе G. Кратную систему Уолша

$$W_{\mathbf{n}}(\mathbf{t}) = W_{n^{(1)}}(t^{(1)}) \cdot W_{n^{(2)}}(t^{(2)}) \ldots W_{n^{(d)}}(t^{(d)})$$

$$(\mathbf{n} = (n^{(1)} \ldots n^{(d)}), \quad \mathbf{t} = (t^{(1)} \ldots t^{(d)}))$$

будем считать определенной на произведении G^d $(d \in \mathbf{N})$. Пусть далее $\Lambda \subset \mathbf{N}^d$ – некоторое семейство d-мерных векторов $\mathbf{n}$, определяющих частичные суммы $S_{\mathbf{n}}(f)$ кратного ряда Фурье-Уолша. Рассмотрим задачу о сходимости частичных сумм $S_{\mathbf{n}}(f)$ в пространствах, лежащих между L^p и L^{∞}, в зависимости от свойств семейства Λ.

Если $n \in \mathbf{N}$ и

$$n = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k \; 2^k \quad (\varepsilon_k = 0 \text{ или } 1)$$

– двоичное разложение числа n, то число

$$\nu(n) = \varepsilon_0 + \sum_{k=1}^{\infty} |\varepsilon_k - \varepsilon_{k-1}|$$

называют вариацией числа. Известно [1], что для констант Лебега L_n по системе Уолша-Пэли

$$\frac{1}{4}\nu(n) \le L_n \le \nu(n).$$

Пусть $\Lambda \subset \mathbf{N}^d$ – произвольное семейство d-мерных векторов. Положим для $0 \le s \le d$

$$D(\Lambda, s) = \limsup_{\substack{n \to \infty \\ \mathbf{n} \in \Lambda}} \min_{\mathbf{k}} \left(\frac{\nu(n^{(1)})\nu(n^{(2)}) \ldots \nu(n^{(d)})}{\nu(n^{(k_1)})\nu(n^{(k_2)}) \ldots \nu(n^{(k_s)})} \right), \quad (\mathbf{k} = (k_1, \ldots k_s))$$

---

* Работа выполнена при частичной поддержке программы "Ведущие научные школы", проект № 00-15-96123.