СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лукомский Д. С.* Об обратной спектральной задаче для дифференциальных операторов с нелинейной зависимостью от спектрального параметра // Математика, механика, математическая кибернетика. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1999. С. 54 – 57.

УДК 517.51

С. Ф. Лукомский

О СХОДИМОСТИ КРАТНЫХ РЯДОВ УОЛША В ПРОСТРАНСТВАХ, БЛИЗКИХ К L^{∞}*

Пусть $\{W_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ – система функций Уолша в нумерации Пэли, определенная на двоичной группе G. Кратную систему Уолша

$$W_{\mathbf{n}}(\mathbf{t}) = W_{n^{(1)}}(t^{(1)}) \cdot W_{n^{(2)}}(t^{(2)}) \dots W_{n^{(d)}}(t^{(d)})$$

$$(\mathbf{n} = (n^{(1)} \dots n^{(d)}), \quad \mathbf{t} = (t^{(1)} \dots t^{(d)}))$$

будем считать определенной на произведении G^d $(d \in \mathbf{N})$. Пусть далее $\Lambda \subset \mathbf{N}^d$ – некоторое семейство d-мерных векторов $\mathbf{n}$, определяющих частичные суммы $S_{\mathbf{n}}(f)$ кратного ряда Фурье-Уолша. Рассмотрим задачу о сходимости частичных сумм $S_{\mathbf{n}}(f)$ в пространствах, лежащих между L^p и L^{∞}, в зависимости от свойств семейства Λ.

Если $n \in \mathbf{N}$ и

$$n = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k \, 2^k \quad (\varepsilon_k = 0 \text{ или } 1)$$

– двоичное разложение числа n, то число

$$\nu(n) = \varepsilon_0 + \sum_{k=1}^{\infty} |\varepsilon_k - \varepsilon_{k-1}|$$

называют вариацией числа. Известно [1], что для констант Лебега L_n по системе Уолша-Пэли

$$\frac{1}{4}\nu(n) \le L_n \le \nu(n).$$

Пусть $\Lambda \subset \mathbf{N}^d$ – произвольное семейство d-мерных векторов. Положим для $0 \le s \le d$

$$D(\Lambda, s) = \limsup_{\substack{n \to \infty \\ \mathbf{n} \in \Lambda}} \min_{\mathbf{k}} \left(\frac{\nu(n^{(1)})\nu(n^{(2)}) \dots \nu(n^{(d)})}{\nu(n^{(k_1)})\nu(n^{(k_2)}) \dots \nu(n^{(k_s)})} \right), \quad (\mathbf{k} = (k_1, \dots k_s))$$

---

* Работа выполнена при частичной поддержке программы "Ведущие научные школы", проект № 00-15-96123.

(при $s=0$ произведение в знаменателе будем считать равным 1). Двоичной размерностью семейства Λ назовем число

$$\dim_2(\Lambda) \stackrel{df}{=} \min(s : D(\Lambda,s)<\infty).$$

Определим пространства, в которых будем рассматривать сходимость. Если $p>1, \alpha\geq 1$, то обозначим через $\hat{L}_{p,\alpha}$ совокупность всех измеримых, конечных почти всюду функций $f: G^d \to R$ таких, что

1) существует непрерывная, строго возрастающая на $(0,\infty)$ функция $\varphi(x)>0$, такая, что $\int\limits_1^\infty \left(\frac{\varphi^{-1}(x)}{x^\alpha}\right)^p dx<\infty$ ($\varphi^{-1}(x)$ – обратная к φ);

2) существует постоянная $\gamma>1$ такая, что $\int\limits_{G^d} \gamma^{\varphi(|f|)} d\mathbf{t}<\infty$.

Ранее [2] было доказано, что $\hat{L}_{p,\alpha}(G^d)$ являются банаховыми пространствами с нормой

$$\|f\|_{\hat{p}\alpha} = \left(\int\limits_1^\infty \left(\frac{\|f\|_x}{x^\alpha}\right)^p dx\right)^{1/p} \approx \left(\sum_{n=1}^\infty \left(\frac{\|f\|_n}{n^\alpha}\right)^p\right)^{1/p}$$

($\|\cdot\|_x$ – это норма в L_x). Кроме того, ступенчатые функции, а значит и многочлены Уолша, образуют в $\hat{L}_{p,\alpha}$ плотное множество. Отметим также, что при любом $\gamma>1$ и любом $\varepsilon>0$

$$L^0\left(\gamma^{|x|^{q+\varepsilon}}\right) \subset \hat{L}_{p,\alpha}(G^d) \subset L^0\left(\gamma^{|x|^q}\right) \qquad \left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{\alpha}\right),$$

где $L^0(\psi)$ обозначает класс Орлича, построенный по N функции Ψ .

ТЕОРЕМА. Пусть $d\geq 1$, $\Lambda\subset \mathbf{N}^d$, $\dim_2\Lambda = r$, $1<p<\infty$, $\alpha\geq 1$. Тогда

1) существует постоянная $C_{d,r}>0$ такая, что для любой $f\in \hat{L}_{p,\alpha}$, для любого $\mathbf{n}\in\Lambda$ ($\mathbf{n}\geq n_0$)

$$\|S_{\mathbf{n}}(f)\|_{\hat{p},\alpha+r} \leq C_{d,r}\|f\|_{\hat{p},\alpha};$$

2) для любой $f\in\hat{L}_{p,\alpha}$ $\lim\limits_{\mathbf{n}\to\infty} \|S_{\mathbf{n}}(f)-f\|_{\hat{p},\alpha+r}=0.$

($\mathbf{n}\to\infty$ означает, что $\min\limits_i n^{(i)}\to\infty$).

Доказательство.

1) Пусть $\limsup\limits_{\substack{\mathbf{n}\to\infty\\ \mathbf{n}\in\Lambda}} \min\limits_{\mathbf{k}} \left(\frac{\nu(n^{(1)})\ldots\nu(n^{(d)})}{\nu(n^{(k_1)})\ldots\nu(n^{(k_r)})}\right) = M<\infty$. Тогда существует вектор $\mathbf{n}_0=(n_0,n_0,\ldots n_0)$ такой, что для всех $\mathbf{n}>\mathbf{n}_0$

$$\min_{\mathbf{k}} \frac{v(n^{(1)})\dots v(n^{(d)})}{v(n^{(k_1)})\dots v(n^{(k_r)})} \le 2M . \qquad (1)$$

Пусть для определенности min в (1) достигается при $k_1 = 1,\dots, k_r = r$. Тогда

$$v(n^{k_{r+1}})v(n^{k_{r+2}})\dots v(n^{k_d}) \le 2M .$$

Запишем частичную сумму $S_{\mathbf{n}}(f)$ в виде

$$S_{\mathbf{n}}(f) = S_{n^d}(S_{n^{d-1}}(\dots S_{n^2}(S_{n^{r-1}}\dots S_{n^1}(t)\dots) . \qquad (2)$$

Так как для одномерной частичной суммы

$$\|S_m f\|_p = \|D_m * f\|_p \le \|D_m\|_1 \cdot \|f\|_p = L_m \cdot \|f\|_p \le v(m)\|f\|_p \quad (p \ge 1)$$

и

$$\|S_m(f)\|_p \le C \cdot p \cdot \|f\|_p \qquad (p \ge 2), \qquad (3)$$

(причем в (3) постоянная C не зависит от p и m), то из (2) и (3) получаем

$$\begin{aligned} \|S_{\mathbf{n}}(f)\|_p &\le v(n^{r+1})\dots v(n^d)\|S_{n^{(r)}}(S_{n^{(r-1)}}\dots S_{n^{(1)}}(f)\dots)\|_p \le \\ &\le 2M \cdot C^r p^r \|f\|_p \quad (p \ge 2). \end{aligned} \qquad (4)$$

Используя (4) находим, что существует постоянная $C_{p,r} > 0$, что для всех $\mathbf{n} > \mathbf{n}_0$

$$\left(\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{\|S_{\mathbf{n}}(f)\|_k}{k^{\alpha+r}}\right)^p\right)^{1/p} \le C_{p,r}\left(\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{\|f\|_k}{k^{\alpha}}\right)^p\right)^{1/p} .$$

Отсюда следует

$$\|S_{\mathbf{n}}(f)\|_{\hat{p},\alpha+r} \le 2 \cdot C_{pr}\|f\|_{\hat{p},\alpha} . \qquad (5)$$

2) Так как полиномы Уолша образуют плотное в $\hat{L}_{p,\alpha}$ множество, то из неравенства (5) обычными средствами получаем второе утверждение теоремы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Schipp F., Wade W. R., Simon P.* Walsh series. An introduction to dyadic harmonic analysis. Budapest: Akademiai kiado, 1990.

2. *Лукомский С. Ф.* О сходимости рядов Уолша в пространствах с интегральной метрикой // Современные методы теории функций и смежные проблемы. Воронеж: Центр.-Черноземн. кн. изд-во, 2001. С. 175 – 176.