Для всех $t \geq 0$ и $\varepsilon \in [-\bar{\varepsilon}, \bar{\varepsilon}]$ имеет место неравенство $\|p_i(\varepsilon, t) - p_i(0, t)\| \leq \|p_i(\varepsilon, t) - \pi(\varepsilon)\| + \|\pi(\varepsilon) - \pi(0)\| + \|\pi(0) - p_i(0, t)\|$. Следовательно, для всех $t > \hat{t}$ и $\varepsilon \in [-\bar{\varepsilon}, \bar{\varepsilon}]$ справедливо $\|p_i(\varepsilon, t) - p_i(0, t)\| \leq \leq 2\delta / 3 + \|\pi(\varepsilon) - \pi(0)\|$. Выберем такое $\varepsilon' \in (0, \bar{\varepsilon}]$, что $\|\pi(\varepsilon) - \pi(0)\| \leq \delta / 3$, $\varepsilon \in [-\varepsilon', \varepsilon']$. Имеем $\|p_i(\varepsilon, t) - p_i(0, t)\| \leq \delta$, $t > \hat{t}$, $\varepsilon \in [-\varepsilon', \varepsilon']$. Выберем теперь такое $\tilde{\varepsilon} \in (0, \varepsilon']$, что $\|p_i(\varepsilon, t) - p_i(0, t)\| \leq \delta$, $t \in [0, \hat{t}]$, $\varepsilon \in [-\tilde{\varepsilon}, \tilde{\varepsilon}]$. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бибиков Ю. Н.* Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Высшая школа, 1991.

2. *Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А.* Матрицы и вычисления. М.: Наука, 1984.

3. *Ланкастер П.* Теория матриц. М.: Наука, 1978.

4. *Бартлетт М. С.* Введение в теорию случайных процессов. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1958.

УДК 519.212

В. Н. Михайлов, С. А. Точилкина

МЕТОД РАСЧЕТА ЗАКОНА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ФУНКЦИИ ОТ ДИСКРЕТНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Рассмотрим измеримую функцию $f(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$ от независимых дискретных случайных величин $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$, имеющих одинаковое распределение

$$p_k = P\{\xi_j = x_k\}, \quad j = \overline{1,n}, \quad k = \overline{1,m}. \tag{1}$$

Необходимо найти закон распределения случайной величины $\eta=f(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$. При небольшом числе случайных величин n и простых функциях $f(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$ эта задача решается элементарно. Однако при больших n и сложных зависимостях $f(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$ вычисления становятся трудоемкими и могут быть выполнены только на компьютере. Построим алгоритм решения поставленной задачи.

Обозначим через $X=\{x_1,x_2,\ldots,x_m\}$ – множество всех возможных значений случайной величины ξ_j, $j=\overline{1,n}$. Обозначим через $Z=X\times X\times\ldots\times X$ – декартово произведение n множеств X. $z=(z_1,z_2,\ldots,z_n)$ – точка в пространстве Z. Пусть $z_1=x_{i1}$, $z_2=x_{i2},\ldots$, $z_n=x_{in}$, в этой точке функция f примет значение $\eta=f(x_{i1},x_{i2},\ldots,x_{in})$. Так как $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$ – независимые одинаково распределенные случайные величины, то [1]

$$\begin{aligned} P\{\eta = f(x_{i1}, x_{i2},\ldots, x_{in})\} &= P\{\xi_1 = x_{i1}, \xi_2 = x_{i2},\ldots, \xi_n = x_{in}\} = \\ &= P\{\xi_1 = x_{i1}\}\cdot P\{\xi_2 = x_{i2}\}\cdots P\{\xi_n = x_{in}\} = p_{i1}\cdot p_{i2}\cdots p_{in}. \end{aligned} \tag{2}$$

Таким образом, в каждой точке $z=(x_{i1}, x_{i2},\dots, x_{in})$ нужно вычислить значение функции $\eta=f(x_{i1},x_{i2},\dots,x_{in})$ и вероятность $p_{i1}\cdot p_{i2}\cdots p_{in}$. Число точек пространства Z равно m^n, т.е. может быть очень велико, что и требует применения вычислительной машины.

Среди m^n значений функции f могут встречаться равные; обозначим через $y_1,y_2,\dots,y_l$ – все различные значения этой функции ($y_i<y_{i+1}$). Чтобы найти закон распределения случайной величины η, надо найти $P\{\eta=y_j\}$, $j=\overline{1,l}$. Эти вероятности определяются по формуле

$$P\{\eta=y_j\}=\sum_{\mathbf{i}\in M(y_j)} p_{i1}\cdot p_{i2}\cdot\dots\cdot p_{in}, \tag{3}$$

где $\mathbf{i}=(i_1,i_2,\dots,i_n)$, $M(y_j)=\{\mathbf{i}: f(x_{i1},x_{i2},\dots,x_{in})=y_j\}$,

т.е. $M(y_j)$ – это подмножество индексов $i_1, i_2,\dots, i_n$ таких, что в точках $z=(x_{i1},x_{i2},\dots,x_{in})$ функция f принимает одно и тоже значение y_j. Таким образом, для нахождения распределения функции $\eta=f(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n)$ необходимо вычислить в каждой точке пространства Z значение f, найти по формуле (2) вероятности значений; затем найти точки, в которых функция f принимает одинаковые значения и по формуле (3) вычислить вероятность этих значений. Если проводить вычисления непосредственно по этой схеме, то потребуется $2m^n$ ячеек памяти для хранения значений функции и соответствующих вероятностей, для определения одинаковых значений f придется сортировать массив из m^n чисел. Приведем более эффективный алгоритм вычисления закона распределения функции от дискретных случайных величин.

Алгоритм. Имеется массив чисел $M1$,в котором находятся значения функции f, и массив $P1$, в котором хранятся соответствующие значения вероятностей.

Все шаги алгоритма повторяются в цикле m^n. Рассмотрим ситуацию после k циклов. В массиве $M1$ находятся в возрастающем порядке все различные значения функции f в точках, вычисленных на первых k циклах. В массиве $P1$ находятся соответствующие вероятности этих значений.

Шаг 1. Формируется очередная точка пространства Z. Вычисляется значение y' функции f в этой точке. По формуле (2) вычисляется вероятность этого значения.

Шаг 2. Методом бинарного поиска [2, с. 484] в массиве $M1$ находится элемент $M1(S)$, равный y'. Если такой элемент существует, то в массиве $P1$ к вероятности, хранящейся в $P1(S)$, прибавляется значение y' функции f, переход к шагу 1. Если элемента, равного y', не существует, то находят два элемента, такие, что $M1(S)< y'<M1(S+1)$, тогда все элементы массива $M1$ и массива $P1$, начиная с $S+1$ элемента, смещаются на один вниз. На место элемента $M1(S+1)$ помещается значение y', а на место элемента $P1(S+1)$ – вероятность этого значения. Переход к шагу 1.

После выполнения m^n циклов в массиве $M1$ в возрастающем порядке будут сформированы все различные значения случайной величины η, а в массиве $P1$ соответствующие вероятности.

В этом алгоритме длина массива $M1$ для хранения значений случайной величины η равна только числу её различных значений и эффективно находятся одинаковые значения функции от случайных величин.

По этому алгоритму составлена стандартная программа на языке ФОРТРАН, которая вычисляет распределение для любой функции $f(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$ и для заданного закона распределения случайных величин ξ_j. Приведем пример применения этой программы. Функция от случайных величин имеет следующий вид:

$$\eta=\xi_1-\xi_2+\xi_3-\ldots+\xi_7.$$

Распределение ξ_i взято в виде

ξ_i	0	1	2
P	0.2	0.3	0.5

Получено следующее распределение случайной величины:

η	P
-6.00	0.000200000000000
-5.00	0.001560000000000
-4.00	0.007316000000000
-3.00	0.023227200000000
-2.00	0.055958100000000
-1.00	0.104483699999999
0.00	0.156233500000000
1.00	0.186868499999999
2.00	0.180721300000000
3.00	0.139221899999999
4.00	0.085485300000000
5.00	0.040369500000000
6.00	0.014405000000000
7.00	0.003450000000000
8.00	0.000500000000000

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гнеденко Б. В.* Курс теории вероятностей. М.: Физматгиз, 1961.

2. *Кнут Д.* Искусство программирования для ЭВМ. В 3 т. Т.3. Сортировка и поиск. М.: Мир, 1978.