где R – множество действительных чисел, упорядоченное естественным порядком $\leq$, F – функция выигрыша. Положим

$$v_1 = \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} F(x,y), \qquad v_2 = \inf_{y \in y} \sup_{x \in X} F(x,y).$$

ТЕОРЕМА 3. Если в игре вида (6) выполняется $v_1 < v_2$, то её C_α-ядро непусто.

Доказательство основано на том, что всякий исход a, удовлетворяющий условию $v_1 < a < v_2$, является допустимым для обоих игроков.

Определение. В игре, имеющей цену v, стратегию x_0 игрока 1 будем называть его критической стратегией, если $(\forall y \in Y) \quad F(x_0, y) \geq v$. Двойственно определяется критическая стратегия игрока 2.

ТЕОРЕМА 4. Пусть игра G вида (6) имеет цену. Тогда:

1) если ни один игрок не имеет критической стратегии, то $v \in C_\alpha(G)$, следовательно, $C_\alpha \neq \varnothing$;

2) если критическая стратегия существует только у одного игрока, то $C_\alpha = \varnothing$.

Следствие. В игре G вида (6) C_α-ядро пусто, тогда и только тогда, когда игра имеет цену и у одного игрока существует критическая стратегия. Отметим, что в играх, в которых множество стратегий игроков и функция выигрыша обладают «хорошей» структурой, C_α-ядро непусто, в частности справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 5. Игра $G = \langle X, Y, R, \leq, F \rangle$, в которой множество стратегий игроков – компактные метрические пространства и функция выигрыша непрерывна, имеет непустое C_α-ядро.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мулен Э.* Теория игр. М.: Мир, 1985.

УДК 517.51

А. М. Родин

СВОЙСТВА *М*-ВАРИАЦИОННЫХ МОДУЛЕЙ НЕПРЕРЫВНОСТИ

Данная статья посвящена обобщению результатов А. П. Терехина, приведённых в статье [1]. Здесь формулируются свойства обобщённых *М*-вариационных модулей непрерывности, где M является *N*-функцией, то есть $M(u)$ допускает представление

$$M(u) = \int_0^{|u|} p(t)\, dt,$$

где $p(t)$ неотрицательная, непрерывная справа, неубывающая при $u \geq 0$ функция, причём $p(0)=0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} p(t)=+\infty$.

Для рассматриваемых функций $M(u)$ под классом Орлича $L_M[a,b]$ будем понимать множество таких вещественных определённых на отрезке $[a,b]$ функций $u(t)$, для которых $\int\limits_a^b M[u(t)]\,dt<+\infty$. Соответственно пространством Орлича назовём структуру [2, с. 83]

$$L_M^*[a,b]=\left\{u(t):\left|\int\limits_a^b u(t)v(t)\,dt\right|<+\infty,\ \forall\, v(t)\in L_N[a,b]\right\},$$

где $N(v)=\max\limits_{u\geq 0}\left[u|v|-M(u)\right]$ – дополнительная N-функция к функции $M(u)$. В пространстве Орлича нам будет удобно использовать норму Люксембурга

$$\|u\|_{\left(L_M^*[a,b]\right)}=\inf\left\{k>0:\int\limits_a^b M\left(\frac{u(t)}{k}\right)dt\leq 1\right\}.$$

Всюду в дальнейшем будем рассматривать только 2π-периодические функции $x(t)$.

Обозначим через V_M пространство функций ограниченной M-вариации, для которых M-вариация $V_M(x)=\sup\limits_{\xi}\kappa_\xi^M(x)<+\infty$, где верхняя грань берется по всем $\xi=\{t_0<t_1<\ldots<t_{m-1}<t_m=t_0+2\pi\}$ разбиениям периода от величин $\kappa_\xi^M(x)=\sum\limits_{i=1}^m M\left[\left|x(t_i)-x(t_{i-1})\right|\right]$, называемых M-вариационными суммами по разбиениям ξ от функции $x(t)$. Используя равенство

$$\omega_{M,1}(\delta,x)=\inf\left\{k>0:\sup_{|\xi|\leq\delta}\kappa_\xi^M\left(\frac{x}{k}\right)\leq 1\right\},$$

где $|\xi|=\max\limits_{1\leq i\leq m}(t_i-t_{i-1})$ – диаметр разбиения ξ, определим M-вариационный модуль непрерывности первого порядка; и для $r\in N$ построим модуль непрерывности порядка r

$$\omega_{M,r}(\delta,x)=\sup_{0<h\leq\delta}\omega_{M,1}\left(h,\Delta_h^{r-1}x\right),$$

где $\Delta_h^r x(t)=\sum\limits_{i=0}^r(-1)^{r-i}C_r^i\,x(t+ih)$ – разности порядка r функции $x(t)$ с шагом h. В пространстве V_M введём норму

$$\|x\|_{V_M}=\max\left(\omega_{M,1}(\delta,x),A(x,0,2\pi)\right),$$

при этом величина $A(x,a,b)$ определяется следующим выражением:

$$A(x,a,b)=\inf\left\{k>0:\ \sup_{t\in[a,b]} M\left(\frac{x(t)}{k}\right)\le 1\right\}.$$

Под целыми модулями непрерывности для $r\in N$ в пространстве X (L_M^* или V_M) будем понимать величины

$$\omega_r(\delta,x)_X=\sup_{0<h\le\delta}\left\|\Delta_h^r x\right\|_X .$$

Говорят, что функция $M(u)$ удовлетворяет Δ'-условию, если существует такая константа $C>0$, что выполняется неравенство

$$M(uv)\le C\,M(u)M(v)$$

для всех $u,v\in[0,+\infty)$.

Первая теорема устанавливает важное соотношение между целыми модулями непрерывности в пространстве V_M и M-вариационными модулями непрерывности.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $r\in N$, $\delta>0$, функция $x(t)\in V_M$. Тогда

$$\omega_r(\delta,x)_{V_M}\le 2\omega_{M,r}(\delta,x).$$

Далее будем предполагать, что функция $M(u)$ удовлетворяет Δ'-условию с константой $C>0$ при $u\ge 0$.

Следующие две теоремы характеризуют связь между M-вариационными модулями непрерывности и модулями непрерывности целого порядка в пространствах Орлича.

ТЕОРЕМА 2. Для произвольных чисел $r\in N$, $\delta>0$ и функции $x(t)\in L_M^*[0,2\pi]$ такой, что $x^{(r-1)}(t)$ является абсолютно непрерывной, а $x^{(r)}(t)\in L_M^*[0,2\pi]$, справедливо неравенство

$$\omega_{M,r}(\delta,x)\le\max(C,1)\,\delta^{r-1}N^{-1}(\delta)\left\|x^{(r)}\right\|_{(L_M^*)}.$$

Доказательство теоремы 2 проводится сначала при $r=1$ путём оценки M-вариационной суммы с использованием представления $x(t_i)-x(t_{i-1})$ через интеграл, интегрального неравенства Йенсена и неравенства $v\le M^{-1}(v)N^{-1}(v)\le 2v$, где $v>0$. Затем применяем собственно Δ'-условие и распространяем теорему на произвольное $r\in N$.

ТЕОРЕМА 3. Для произвольной функции $x(t)\in V_M$, чисел $r\in N$ и $\delta>0$ выполняется неравенство

$$\omega_r(\delta,x)_{L_M^*}\le\frac{2\max(C,1)}{M^{-1}\left(\frac{1}{\delta}\right)}\omega_{M,r}(\delta,x).$$

При доказательстве теоремы 3 используется оценка целого модуля непрерывности в пространстве L_M^* через M-вариацию на отрезке, супераддитивность последней величины и Δ'-условие.
В заключение сформулируем свойство.

ТЕОРЕМА 4. Пусть даны числа $r, n \in N$ и $\delta > 0$, тогда для функций $x(t) \in V_M$ справедливо неравенство

$$\omega_{M,r}(n\delta, x) \le \frac{\max(C,1)n^r}{M^{-1}(n)} \omega_{M,r}(\delta, x).$$

Это неравенство является аналогом соответствующего свойства классических модулей непрерывности в банаховых пространствах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Терехин А. П.* Приближение функций ограниченной p-вариации // Известия вузов. Сер. Математика. 1965. Вып. 2. С. 171 – 187.

2. *Красносельский М. А., Рутицкий Я. Б.* Выпуклые функции и пространства Орлича. М.: Наука, 1958. С. 11 – 112.

3. *Orlicz W., Musielak J.* On generalized variations // Studia Mathematica. 1959. Vol. 18. P. 11 – 41.

УДК 519.4

В. В. Розен

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ИЗОТОННЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ В ВИДЕ СУММ ВЕСОВ МАЖОРАНТНО СТАБИЛЬНЫХ ПОДМНОЖЕСТВ*

Дано описание изотонных отображений произвольного конечного упорядоченного множества в пространство R. Указана специализация общей конструкции для случая строго изотонного отображения и для случая нумерации (линейного доупорядочения). Основную роль в предлагаемой конструкции играет понятие мажорантно стабильного подмножества, то есть такого подмножества упорядоченного множества, которое вместе с любым своим элементом содержит также больший элемент.

1. Пусть $< A, \omega >$ – конечное (частично) упорядоченное множество и $B_1, \ldots, B_m$ – перечень его непустых мажорантно стабильных подмножеств. Присвоим каждому подмножеству B_j неотрицательный вес λ_j $(j = \overline{1,m})$. Определим отображение $\varphi : A \to R$, полагая

$$\varphi(a) = \sum_{a \in B_j} \lambda_j . \tag{1}$$

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 00-01-00053.