УДК 517.984

В. С. Рыхлов

О КРАТНОЙ НЕПОЛНОТЕ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ПУЧКОВ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ*

Рассмотрим в пространстве $L_2[0,1]$ пучок операторов $L(\lambda)$, порожденный дифференциальным выражением

$$l(y,\lambda)=y^{(n)}(x)+\lambda p_1 y^{(n-1)}(x)+\ldots+\lambda^n p_n y(x),$$

где $p_j\in\mathbf{C}$, и двухточечными краевыми условиями

$$\sum_{s+k\le n-1}\lambda^s(\alpha_{jsk}y^{(k)}(0)+\beta_{jsk}y^{(k)}(1))=0,\quad j=\overline{1,n},$$

где $\alpha_{jsk},\beta_{jsk}\in\mathbf{C}$.

Пусть корни ω_j, $j=\overline{1,n}$, характеристического уравнения $\omega^n+p_1\omega^{n-1}+\ldots+p_n=0$ попарно различны, отличны от нуля и лежат на одном луче, выходящем из начала координат. Не нарушая общности, можно считать, что $0<\omega_1<\ldots<\omega_n$. Пусть собственные значения (с.з.) пучка $L(\lambda)$ являются простыми и образуют счётное множество. Обозначим через Λ множество ненулевых с.з. Пусть, кроме того, функция

$$y(x,\lambda)=a_1e^{\lambda\omega_1x}+a_2e^{\lambda\omega_2x}+\ldots+a_ne^{\lambda\omega_nx},\quad a_j\in\mathbf{C},\tag{1}$$

является порождающей для собственных функций пучка $L(\lambda)$, соответствующих с.з. из множества Λ.

Рассмотрим системы функций

$$Y_\Lambda=\{y(x,\lambda)\,|\,\lambda\in\Lambda\},\quad Y_{\mathbf{C}}=\{y(x,\lambda)\,|\,\lambda\in\mathbf{C}\}.$$

ТЕОРЕМА. Система $Y_{\mathbf{C}}$ не является n-кратной полной ни в каком пространстве $L_2[0,\sigma]$ при $\sigma>0$ и имеет бесконечный дефект.

Доказательство. Обозначим

$$\hat{y}(x,\lambda)=(y(x,\lambda),\lambda y(x,\lambda),\ldots,\lambda^{n-1}y(x,\lambda)),\ \hat{f}(x)=\left(\overline{f_0(x)},\overline{f_1(x)},\ldots,\overline{f_{n-1}(x)}\right),$$

$f_j\in L_2[0,\sigma]$ и предположим $\forall\lambda\in\mathbf{C}$ $\hat{y}(x,\lambda)\perp\hat{f}(x)$ в $L_2^n[0,\sigma]$, то есть

$$0=\int_0^\sigma y(x,\lambda)f_0(x)dx+\lambda\int_0^\sigma y(x,\lambda)f_1(x)dx+\ldots+\lambda^{n-1}\int_0^\sigma y(x,\lambda)f_{n-1}(x)dx.\tag{2}$$

Проинтегрируем k-е слагаемое $(k=\overline{1,n-1})$ справа по частям $n-k$ раз. Используя обозначения

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 00-01-00075, и программы “Ведущие научные школы”, проект № 00-15-96123.

$$(g)_1(x) := \int_0^x g(\xi)d\xi, \quad (g)_j(x) := \int_0^x (g)_{j-1}(\xi)d\xi = \int_0^x \frac{(x-\xi)^{j-1}}{(j-1)!} g(\xi)d\xi \ , \ j = \overline{2, n-1},$$

и накладывая на функции $f_0, f_1, ..., f_{n-2}$ условия

$$(f_{k-1})_j(\sigma) = 0, \quad j = \overline{1, n-k}, \quad k = \overline{1, n-1}, \tag{3}$$

получим из (2)

$$0 = \int_0^\sigma \sum_{k=1}^n \lambda^{k-1}(-1)^{n-k} y^{(n-k)}(x,\lambda)(f_{k-1})_{n-k}(x)dx. \tag{4}$$

Учитывая (1) и обозначая

$$F_s(x) := \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \omega_s^j (f_{n-1-j})_j(x), \quad s = \overline{1, n}, \tag{5}$$

запишем соотношение (4) в виде

$$0 = \lambda^{n-1} \sum_{s=1}^n \int_0^\sigma a_s F_s(x) e^{\lambda\omega_s x} dx = \lambda^{n-1} \sum_{s=1}^n \int_0^{\sigma\omega_s} \frac{a_s}{\omega_s} F_s\left(\frac{x}{\omega_s}\right) e^{\lambda x} dx, \quad \forall\lambda \in \mathbf{C}. \tag{6}$$

Отсюда получим

$$0 = \int_0^{\sigma\omega_n} F(x) e^{\lambda x} dx, \quad \forall\lambda \in \mathbf{C} \setminus \{0\}, \tag{7}$$

где

$$F(x) = \begin{cases} \sum_{s=1}^n \frac{a_s}{\omega_s} F_s\left(\frac{x}{\omega_s}\right), & x \in [0, \sigma\omega_1], \\ \sum_{s=2}^n \frac{a_s}{\omega_s} F_s\left(\frac{x}{\omega_s}\right), & x \in (\sigma\omega_1, \sigma\omega_2], \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ \frac{a_n}{\omega_n} F_n\left(\frac{x}{\omega_n}\right), & x \in (\sigma\omega_{n-1}, \sigma\omega_n]. \end{cases}$$

Из (7) следует, что $F(x) = 0$ для почти всех $x \in [0, \sigma\omega_n]$ или, более подробно,

$$\frac{a_1}{\omega_1} F_1\left(\frac{x}{\omega_1}\right) + \frac{a_2}{\omega_2} F_2\left(\frac{x}{\omega_2}\right) + \ldots + \frac{a_{n-1}}{\omega_{n-1}} F_{n-1}\left(\frac{x}{\omega_{n-1}}\right) + \frac{a_n}{\omega_n} F_n\left(\frac{x}{\omega_n}\right) = 0, \quad x \in [0, \sigma\omega_1],$$

$$\frac{a_2}{\omega_2} F_2\left(\frac{x}{\omega_2}\right) + \ldots + \frac{a_{n-1}}{\omega_{n-1}} F_{n-1}\left(\frac{x}{\omega_{n-1}}\right) + \frac{a_n}{\omega_n} F_n\left(\frac{x}{\omega_n}\right) = 0, \quad x \in (\sigma\omega_1, \sigma\omega_2],$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$
\begin{gathered}
\frac{a_{n-1}}{\omega_{n-1}}F_{n-1}\left(\frac{x}{\omega_{n-1}}\right)+\frac{a_n}{\omega_n}F_n\left(\frac{x}{\omega_n}\right)=0, \quad x\in(\sigma\omega_{n-2},\sigma\omega_{n-1}],\\
\frac{a_n}{\omega_n}F_n\left(\frac{x}{\omega_n}\right)=0, \quad x\in(\sigma\omega_{n-1},\sigma\omega_n].
\end{gathered} \tag{8}
$$

Пусть $h_1(x),h_2(x),...,h_{n-1}(x)\in C^{n-1}[0,\sigma]$ – произвольные функции такие, что $h_j(\sigma)=h_j'(\sigma)=...=h_j^{(n-1)}(\sigma)=0$, $j=\overline{1,n-1}$, а функция $h_n(x)\in C^{n-1}[0,\sigma]$ и $h_n(\sigma)=h_n'(\sigma)=...=h_n^{(n-1)}(\sigma)=0$, где

$$
h_n\left(\frac{x}{\omega_n}\right)=\begin{cases}
-h_1\left(\frac{x}{\omega_1}\right)-h_2\left(\frac{x}{\omega_2}\right)-...-h_{n-1}\left(\frac{x}{\omega_{n-1}}\right), & x\in[0,\sigma\omega_1],\\
-h_2\left(\frac{x}{\omega_2}\right)-...-h_{n-1}\left(\frac{x}{\omega_{n-1}}\right), & x\in(\sigma\omega_1,\sigma\omega_2],\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\
-h_{n-1}\left(\frac{x}{\omega_{n-1}}\right), & x\in(\sigma\omega_{n-2},\sigma\omega_{n-1}],\\
0, & x\in(\sigma\omega_{n-1},\sigma\omega_n].
\end{cases}
$$

Очевидно, функций $h_j(x)$, удовлетворяющих указанным свойствам, бесконечно много.

Положим

$$F_j(x)=\frac{\omega_j}{a_j}h_j(x), \quad x\in[0,\sigma], \quad j=\overline{1,n}.$$

По построению эти функции удовлетворяют соотношениям (8). Учитывая формулы (5), для нахождения функций $(f_0)_{n-1},(f_1)_{n-2},...,f_{n-1}$ таких, что для функций $f_0,f_1,...,f_{n-1}$ выполняется соотношение (2), нужно решить следующую систему:

$$
\begin{cases}
f_{n-1}(x)-\omega_1(f_{n-2})_1(x)+...+(-1)^{n-1}\omega_1^{n-1}(f_0)_{n-1}(x)=\frac{\omega_1}{a_1}h_1(x),\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
f_{n-1}(x)-\omega_n(f_{n-2})_1(x)+...+(-1)^{n-1}\omega_n^{n-1}(f_0)_{n-1}(x)=\frac{\omega_n}{a_n}h_n(x).
\end{cases} \tag{9}
$$

При фиксированном $x\in[0,\sigma]$ (9) является системой линейных алгебраических уравнений с определителем Вандермонда от попарно различных чисел $(-\omega_1),(-\omega_2),...,(-\omega_n)$, который не зависит от x и отличен от нуля.

Из (9) получим

$$\begin{aligned}
f_{n-1}(x) \quad &= \alpha_{n-11}h_1(x)+\ldots+\alpha_{n-1n}h_n(x),\\
(f_{n-2})_1(x) &= \alpha_{n-21}h_1(x)+\ldots+\alpha_{n-2n}h_n(x),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
(f_0)_{n-1}(x) &= \alpha_{01}h_1(x)+\ldots+\alpha_{0n}h_n(x),
\end{aligned} \tag{10}$$

где α_{jk} – числовые коэффициенты, определяемые однозначно из системы (9).

Дифференцируя 2-е соотношение в (10) 1 раз, 3-е соотношение 2 раза, …, последнее соотношение n-1 раз, получим

$$\begin{aligned}
f_{n-1}(x) &= \alpha_{n-11}h_1(x)+\ldots+\alpha_{n-1n}h_n(x),\\
f_{n-2}(x) &= \alpha_{n-21}h_1'(x)+\ldots+\alpha_{n-2n}h_n'(x),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
f_0(x) &= \alpha_{01}h_1^{(n-1)}(x)+\ldots+\alpha_{0n}h_n^{(n-1)}(x).
\end{aligned}$$

По построению множество $\left\{\hat{f}(x)=\left(\overline{f_0(x)},\overline{f_1(x)},\ldots,\overline{f_{n-1}(x)}\right)\right\}$ удовлетворяет соотношению (2) $\forall\lambda\in\mathbf{C}$ и образует бесконечномерное подпространство в $L_2^n[0,\sigma]$. Тем самым теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Каково бы ни было множество $\Lambda\subset\mathbf{C}$, система Y_Λ не является n-кратно полной ни в каком пространстве $L_2[0,\sigma]$ при $\sigma>0$ и имеет бесконечный дефект.

УДК 517.51

С. П. Сидоров

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ЛИНЕЙНЫХ ФОРМОСОХРАНЯЮЩИХ ОПЕРАТОРОВ*

Пусть $X=[0,1]$ и $C^k(X), k\ge 0,$ – пространство действительнозначных и k-раз непрерывно дифференцируемых функций на X. Обозначим D^i оператор дифференцирования i-го порядка; $\|\cdot\|$ будет означать равномерную норму в $C(X)=C^0(X)$, $\|f\|=\sup\limits_{x\in X}|f(x)|$. Обозначим $e_i(x)=x^i, i=1,2,\ldots$ Пусть $\sigma=(\sigma_i)_{i\ge 0}$ – последовательность с элементами $\sigma_i\in\{-1,0,1\}$ и h,k – два целых числа таких, что $0\le h\le k$ и $\sigma_h\cdot\sigma_k\ne 0$. Обозначим $C_{h,k}(\sigma)=\{f\in C^k(X):\ \sigma_i\cdot D^i f\ge 0,\ \ i=h,\ldots,k\}$. Пусть

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 99-01-01120, и частичной поддержке программы “Ведущие научные школы”, грант № 00-15-96123.