Из (9) получим

$$\begin{aligned} f_{n-1}(x) &= \alpha_{n-11}h_1(x)+\ldots+\alpha_{n-1n}h_n(x), \\ (f_{n-2})_1(x) &= \alpha_{n-21}h_1(x)+\ldots+\alpha_{n-2n}h_n(x), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (f_0)_{n-1}(x) &= \alpha_{01}h_1(x)+\ldots+\alpha_{0n}h_n(x), \end{aligned} \tag{10}$$

где α_{jk} – числовые коэффициенты, определяемые однозначно из системы (9).

Дифференцируя 2-е соотношение в (10) 1 раз, 3-е соотношение 2 раза, …, последнее соотношение n-1 раз, получим

$$\begin{aligned} f_{n-1}(x) &= \alpha_{n-11}h_1(x)+\ldots+\alpha_{n-1n}h_n(x), \\ f_{n-2}(x) &= \alpha_{n-21}h_1'(x)+\ldots+\alpha_{n-2n}h_n'(x), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_0(x) &= \alpha_{01}h_1^{(n-1)}(x)+\ldots+\alpha_{0n}h_n^{(n-1)}(x). \end{aligned}$$

По построению множество $\left\{\hat{f}(x)=\left(\overline{f_0(x)},\overline{f_1(x)},\ldots,\overline{f_{n-1}(x)}\right)\right\}$ удовлетворяет соотношению (2) $\forall\lambda\in\mathbf{C}$ и образует бесконечномерное подпространство в $L_2^n[0,\sigma]$. Тем самым теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Каково бы ни было множество $\Lambda\subset\mathbf{C}$, система Y_Λ не является n-кратно полной ни в каком пространстве $L_2[0,\sigma]$ при $\sigma>0$ и имеет бесконечный дефект.

УДК 517.51

С. П. Сидоров

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ЛИНЕЙНЫХ ФОРМОСОХРАНЯЮЩИХ ОПЕРАТОРОВ*

Пусть $X=[0,1]$ и $C^k(X), k\geq 0$, – пространство действительнозначных и k-раз непрерывно дифференцируемых функций на X. Обозначим D^i оператор дифференцирования i-го порядка; $\|\cdot\|$ будет означать равномерную норму в $C(X)=C^0(X)$, $\|f\|=\sup_{x\in X}|f(x)|$. Обозначим $e_i(x)=x^i, i=1,2,\ldots$ Пусть $\sigma=(\sigma_i)_{i\geq 0}$ – последовательность с элементами $\sigma_i\in\{-1,0,1\}$ и h,k – два целых числа таких, что $0\leq h\leq k$ и $\sigma_h\cdot\sigma_k\neq 0$. Обозначим $C_{h,k}(\sigma)=\{f\in C^k(X):\ \sigma_i\cdot D^i f\geq 0,\ \ i=h,\ldots,k\}$. Пусть

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 99-01-01120, и частичной поддержке программы "Ведущие научные школы", грант № 00-15-96123.

$\Gamma=\{i: h \le i < k, \sigma_i \ne 0, \sigma_{i+1}=0, \sigma_i \cdot \sigma_{i+2} \ne -1\}$. Если $\Gamma=\varnothing$, то мы, следуя [1], будем называть $C_{h,k}(\sigma)$ конусом I типа, в противном случае – конусом II типа. В работе [1] получены следующие обобщения теоремы П. П. Коровкина [2]:

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть $C_{h,k}(\sigma)$ – конус I или II типа и пусть $L_n: C^k(X) \to C^k(X)$ есть последовательность линейных операторов таких, что

$$L_n(C_{h,k}(\sigma)) \subset C_{k,k}(\sigma). \tag{1}$$

Если $\lim\limits_{n\to\infty}\left\|D^k L_n e_j - D^k e_j\right\| = 0,\ j=h,\dots,k+2,$ то $\lim\limits_{n\to\infty}\left\|D^k L_n f - D^k f\right\| = 0$ для всех $f \in C^k(X)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Пусть $C_{h,k}(\sigma)$ – конус II типа и $r \in \Gamma$. Пусть $L_n: C^k(X) \to C^r(X)$ есть последовательность линейных операторов таких, что

$$L_n(C_{h,k}(\sigma)) \subset C_{r,r}(\sigma). \tag{2}$$

Если $\lim\limits_{n\to\infty}\left\|D^r L_n e_j - D^r e_j\right\| = 0,\ j=h,\dots,k$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\left\|D^r L_n f - D^r f\right\| = 0$ для всех $f \in C^k(X)$.

Напомним, что оператор L, определённый в $C(X)$, пространство образов которого имеет размерность $n+1$, $\dim\{Lf : f \in C(X)\} = n+1$, называется оператором конечного ранга $n+1$.

В работе [3], обобщая результат П. П. Коровкина [4], было показано, что порядок приближения производными линейных операторов конечного ранга $n+1$, обладающих свойством формосохранения (1), не может быть выше, чем n^{-2}, уже на системе из трёх функций e_k, e_{k+1}, e_{k+2}.

Цель настоящей статьи – установить аналогичный результат для линейных конечномерных операторов, обладающих свойством формосохранения (2).

ТЕОРЕМА. Пусть $C_{r,r+2}(\sigma)$ – конус II типа и $r \in \Gamma$. Пусть $L_n: C^{r+2}(X) \to C^r(X)$ есть линейный оператор конечного ранга $n+1$ такой, что $D^r L_n e_r = D^r e_r$ и

$$L_n(C_{r,r+2}(\sigma)) \subset C_{r,r}(\sigma). \tag{3}$$

Тогда

$$\frac{1}{(r+1)!}\cdot\Big(1+\frac{1}{2(n+1)}\Big)\cdot\left\|D^r L_n e_{r+1} - D^r e_{r+1}\right\| + \frac{1}{(r+2)!}\cdot\left\|D^r L_n e_{r+2} - D^r L_n e_{r+2}\right\| \ge$$

$$\ge \frac{1}{8(n+1)^2}. \tag{4}$$

Доказательство. Без потери общности считаем $\sigma_r = \sigma_{r+2} = 1$. Так как L_n – линейный оператор конечного ранга $n+1$, то существует система функций $\{u_j\}_{j=0}^n$, порождающая линейное пространство $\{L_n f : f \in C^{r+2}(X)\}$. Рассмотрим матрицу $A = (D^r u_j(z_i))_{j=0,i=0}^{n,n+1}$, где $z_i = \dfrac{i}{n+1}, i = 0,\ldots,n+1$. Ранг матрицы A не равен нулю. Действительно, если $rank\, A = 0$, то $D^r L_n f(z_k) = \sum_{i=0}^{n} a_i(f) \cdot D^r u_i(z_k) = 0$ для всех $f \in C^{r+2}(X)$, что противоречит условию $D^r L_n e_r = D^r e_r$.

Возьмём ненулевой вектор $\delta = (\delta_i)_{i=0}^n$, ортогональный всем строкам матрицы A:

$$\sum_{i=0}^{n+1} |\delta_i| = 1, \quad \sum_{i=0}^{n+1} \delta_i D^r u_j(z_i) = 0, \quad j = 0,\ldots,n.$$

Определим непрерывную функцию $h \in C^{r+2}(X)$ так, чтобы

а) $D^{r+2} h(z_i) = \operatorname{sgn} \delta_i, \quad i = 0,\ldots,n+1$; б) $D^i h(0) = 0, \quad i = 0,\ldots,r-1$;

в) $\left\| D^{r+1} h \right\| \le 4(n+1)$; г) $\left\| D^{r+2} h \right\| \le 8(n+1)^2$.

Такая функция существует [5, с. 82 – 96]. Так как функция $D^r L_n h$ принадлежит линейному пространству, порождённому системой функций $\{D^r u_j\}$, мы получаем $\sum_{i=0}^{n+1} \delta_i D^r L_n h(z_i) = 0$. Тогда

$$1 = \sum_{i=0}^{n+1} |\delta_i| = \sum_{i=0}^{n+1} \delta_i D^r h(z_i) = \sum_{i=0}^{n+1} \delta_i (D^r h(z_i) - D^r L_n h(z_i)) \le$$

$$\le \sum_{i=0}^{n+1} |\delta_i| \cdot \left| D^r L_n h(z_i) - D^r h(z_i) \right| \le \left\| D^r L_n h - D^r H \right\|. \tag{5}$$

Возьмём $x \in X$ и определим две функции $p_{j,x}$, $j = 1,2$, так, чтобы

а) $p_{j,x} \in C^{r+2}(X)$; б) $D^{r+2} p_{j,x} = \left\| D^{r+2} h \right\|$; в) $D^{r+1} p_{j,x}(x) = (-1)^{j+1} D^{r+1} h(x)$;

г) $D^r p_{j,x}(x) = 0$; д) $D^i p_{j,x}(0) = 0, \quad i = 0,\ldots,r-1$.

Тогда

$$p_{j,x} + (-1)^j (h - \frac{1}{r!} e_r \cdot D^r h(x)) \in C_{r,r+2}(\sigma), \ j = 1,2. \tag{6}$$

Заметим также, что $D^r p_{1,x}(t) = D^{r+1}h(x)\cdot(t-x) + \frac{1}{2}\left\|D^{r+2}h\right\|\cdot(t-x)^2$, и $D^r p_{2,x}(t) = -D^{r+1}h(x)\cdot(t-x) + \frac{1}{2}\left\|D^{r+2}h\right\|\cdot(t-x)^2$. Теперь, учитывая (3), (6), получаем

$$L_n(p_{j,x} + (-1)^j (h - D^r h(x)\cdot \frac{1}{r!}e_r) \in C_{r,r}(\sigma), \quad j = 1,2.$$

Значит,

$$D^r L_n(h - D^r h(x)\cdot\frac{1}{r!}e_r)(x) \le D^r L_n p_{1,x},$$

$$-D^r L_n(h - D^r h(x)\cdot\frac{1}{r!}e_r)(x) \le D^r L_n p_{2,x}$$

и, следовательно,

$$\left|D^r L_n h(x) - D^r h(x)\right| = \left|D^r L_n(h - D^r h(x)\frac{1}{r!}e_r)\right| \le$$

$$\le \max\left\{\left|D^r L_n p_{1,x}(x)\right|, \left|D^r L_n p_{2,x}(x)\right|\right\} =$$

$$= \frac{1}{(r+1)!}\left|D^{r+1}h(x)\right|\cdot\left|D^r L_n e_{r+1} - D^r e_{r+1}\right| +$$

$$+\frac{1}{(r+1)!}\left\|D^{r+2}h\right\|\cdot\left|D^r L_n e_{r+1} - D^r e_{r+1}\right| + \frac{1}{2(r+2)!}\left\|D^{r+2}h\right\|\cdot\left|D^r L_n e_{r+2} - D^r e_{r+2}\right|.$$

Так как $\left\|D^{r+1}h\right\| \le 4(n+1)$, $\left\|D^{r+2}h\right\| \le 8(n+1)^2$, то с учетом (5) мы получаем (4). □

Отметим, что линейный оператор конечного ранга $n+1$, обладающий свойством (3), для которого оценка (4) является точной, существует (см. [3]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Munoz-Delgado F. J., Ramirez-Gonzalez V., Cardenas-Morales D.* Qualitative Korovkin-type results on conservative approximation // J. Approx. Theory. 1998. Vol. 94. P. 144 – 159.

2. *Коровкин П. П.* Сходимость линейных положительных операторов в пространстве непрерывных функций // Докл. АН СССР. 1953. Т. 90. С. 961 – 964.

3. *Sidorov S. P.* On the order of approximation by linear shape-preserving operators of finite rank // East J. on Approx. 2001. Vol. 7. № 1. P. 1 – 8.

4. *Коровкин П. П.* Порядок приближения функций линейными положительными операторами // Докл. АН СССР. 1957. Т. 114, № 6. С. 1158 – 1161.

5. *Корнейчук Н. П.* Сплайны в теории приближений. М.: Наука, 1984.