$$P(t)=2\pi it;\ \lambda_k=\frac{-4}{\alpha(y_k^2+1)};\ \Psi(t,\lambda_k)=1_+(t)\exp\left\{\frac{-4t}{\alpha(y_k^2+1)}\right\}e_k(x).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Александров Е. Л.* Спектральные функции самосопряженных и симметрических операторов умножения в пространствах $L^2(X,\mu)$ // Матем. заметки. 2000. Т. 67. Вып. 6. С. 803 – 810.

2. *Ахиезер Н. И., Глазман И. М.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1996.

3. *Александров Е. Л.* О методе разделения переменных решения операторных уравнений // Математика, механика, математическая кибернетика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1999. С. 10 – 12.

УДК 519.872

И. Е. Тананко

О СТАЦИОНАРНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ СЕТЕЙ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С УПРАВЛЕНИЕМ МАРШРУТИЗАЦИЕЙ

Некоторые типы сетей массового обслуживания с управлением потоками и маршрутизацией имеют стационарное распределение вероятностей состояний в мультипликативной форме. Примерами таких сетей являются сети обслуживания с блокировками [1], с интенсивностями обслуживания и маршрутизацией, зависящими от состояния сетей [2], сети, удовлетворяющие требованию квазиобратимости систем массового обслуживания [3]. Целью данной статьи является исследование стационарного распределения вероятностей состояний открытых и замкнутых экспоненциальных сетей массового обслуживания с маршрутными матрицами, зависящими от состояния сетей.

Рассматривается открытая экспоненциальная сеть массового обслуживания Γ [4], образованная L системами обслуживания C_i, $i=1,2,\dots,L$, типа $M|M|1$ с интенсивностями обслуживания μ_i. Из источника C_0 в сеть поступает пуассоновский поток требований одного класса с интенсивностью λ_0. Состояние сети обслуживания определяется вектором $n=(n_i)$, где n_i – число требований, находящихся в системе C_i, E – множество состояний сети обслуживания. Считается, что каждому состоянию n в процессе эволюции сети соответствует маршрутная матрица $\Theta(n)=(\theta_{ij}(n))$, $i,j=0,1,2,\dots,L$, элементы θ_{0i}, $i=1,2,\dots,L$, которой не зависят от состояния сети n. Вводятся обозначения: $\lambda(n)=(\lambda_i(n_i))$, $n_i=0,1,2,\dots$, $\lambda_i(n_i)$ – интенсивность поступления требований в систему C_i при условии, что в C_i

находится n_i требований; $\omega(n)=(\omega_i(n_i))$, $n_i=0,1,2,...$, $\omega_i(n_i)$ – относительная интенсивность потока требований в систему C_i при условии, что в C_i находится n_i требований; ω_0 – относительная интенсивность потока требований из источника C_0 в сеть обслуживания; $P(n)$ – стационарная вероятность пребывания сети обслуживания в состоянии n; $P_i(n_i)$ – стационарная вероятность пребывания системы C_i в состоянии n_i.

ТЕОРЕМА 1. Если для открытой сети массового обслуживания Г с управлением маршрутизацией выполнены условия

$$\sum_{n_i=1}^{\infty}\prod_{m=1}^{n_i}\left(\frac{\lambda_i(m)}{\mu_i}\right)<\infty, \quad i=1,2,...,L,$$

то стационарный режим в сети существует, каждая система C_i функционирует как независимая в вероятностном смысле система массового обслуживания, и стационарные вероятности состояний сети обслуживания определяются выражениями

$$P(n)=\prod_{i=1}^{L}P_i(n_i), \quad n\in E,$$

где

$$P_i(n_i)=\left[1+\sum_{n_i=1}^{\infty}\prod_{m=1}^{n_i}\left(\frac{\lambda_i(m)}{\mu_i}\right)\right]^{-1}\prod_{m=1}^{n_i}\left(\frac{\lambda_i(m)}{\mu_i}\right),$$

$$\lambda_i(n_i)=\lambda_0\omega_i(n_i)/\omega_0, \quad i=1,2,...,L, \quad n_i=1,2,... .$$

Элементы $\omega_i(n_i)$ определяются решением системы уравнений

$$\omega_i(n_i)=\omega_0\theta_{0i}+\sum_{j=1}^{L}\omega_j(n_j+1)\theta_{ji}(n-1_i+1_j), \quad i=1,2,...,L, \quad n\in E, \tag{1}$$

с условием нормировки

$$\omega_0+\sum_{i=1}^{L}\sum_{n_i=1}^{\infty}\omega_i(n_i)=1, \tag{2}$$

где 1_i – вектор, i-я компонента которого равна 1, а остальные равны 0.

Доказательство. Анализируя допустимые переходы между состояниями сети обслуживания Г, находящейся в стационарном режиме функционирования, получается следующая система уравнений:

$$\left[\lambda_0+\sum_{j=1}^{L}\mu_j\gamma(n_j)\right]P(n)=\lambda_0\sum_{j=1}^{L}P(n-1_j)\theta_{0j}+\sum_{j=1}^{L}P(n+1_j)\theta_{j0}\mu_j+$$

$$+\sum_{i=1}^{L}\sum_{j=1}^{L}P(n-1_j+1_i)\mu_i\theta_{ij}(n-1_j+1_i)\gamma(n_j), \quad n\in E, \tag{3}$$

где

$$\gamma(n_i)=\begin{cases}1, & \text{если } n_i>0,\\ 0, & \text{если } n_i=0.\end{cases}$$

Пусть $P(n)$ – функция L неизвестных параметров

$$P(n)=\prod_{i=1}^{L}Q(n_i). \qquad (4)$$

Аналогично работе [5], показывается, что подстановка (4) обращает систему уравнений (3) в тождество, если $Q(n_i)$ имеет вид

$$Q(n_i)=\prod_{m=1}^{n_i}\left(\frac{\lambda_i(m)}{\mu_i}\right).$$

Теорема 1 обобщает результаты, полученные в работах [1, 5]. Видно, что если маршрутная матрица $\Theta=(\theta_{ij})$ не зависит от состояния n, и, следовательно, $\lambda_i=\lambda_i(n_i)$, $\forall n\in E$, система уравнений (1) и условие (2) принимают соответственно вид $\omega\Theta=\omega$ и $\sum\omega_i=1$, которые имеют место для сетей массового обслуживания без управления.

Следствие. Для замкнутой сети массового обслуживания с управлением маршрутизацией, содержащей N требований одного класса, система уравнений (1) и условие (2) принимают соответственно вид

$$\omega_i(n_i)=\sum_{j=1}^{L}\omega_j(n_j+1)\theta_{ji}(n-1_i+1_j),\quad i=1,2,\dots,L,\quad n\in S(N,L), \qquad (5)$$

$$\sum_{i=1}^{L}\sum_{n_i=0}^{N}\omega_i(n_i)=1, \qquad (6)$$

где $S(N,L)$ – множество состояний данной сети обслуживания.

ТЕОРЕМА 2. Стационарное распределение вероятностей состояний замкнутой сети массового обслуживания с управлением маршрутизацией определяется выражениями

$$P(n)=\frac{1}{G(N,L)}\prod_{i=1}^{L}\prod_{m=0}^{n_i}\left(\frac{\omega_i(m)}{\mu_i}\right),\qquad n\in S(N,L),$$

где $G(N,L)$ – нормализующая константа, $\omega_i(n_i)$ определяются решением системы уравнений (5) с условием (6).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Малинковский Ю. В., Якубович О. В.* Сети массового обслуживания с мгновенно обслуживаемыми заявками I. Модели с одним типом заявок // Автоматика и телемеханика. 1998. № 1. С. 92 – 106.

2. *Henderson W., Northcote B. S., Taylor P. G.* State-dependent signalling in queueing network // Adv. Appl. Prob. 1994. Vol. 26. P. 436 – 455.

3. *Boucherie R. J.* Norton's equivalent for queueing networks comprised of quasireversible components linked by state-dependent routing // Performance Evaluation. 1998. Vol. 32. P. 83 – 99.