4. *Митрофанов Ю. И.* Основы теории сетей массового обслуживания. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1993.
5. *Jackson J. R.* Networks of waiting lines // Oper. Res. 1957. Vol. 5. P. 518 – 521.

УДК 517.51

П. А. Терехин

НЕРАВЕНСТВО БЕРНШТЕЙНА ДЛЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ВЕКТОРОВ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА*

Общий подход к получению прямых и обратных теорем теории приближений, основанный на изучении одно- и многопараметрических групп операторов, разработан в статьях Н. П. Купцова [1] и А. П. Терехина [2, 3]. В то же время современные задачи приближения на действительных и комплексных многообразиях требуют рассмотрения представлений более общих групп (чем группы $(R,+)$ и $(R^n,+)$), действующих на многообразиях. Возникает задача распространения результатов работ [1–3] на случай представления T_g группы Ли G в банаховом пространстве E.

Предположим, что представление T_g удовлетворяет условиям:

(1) $T_g f \to f$ при $g \to e$ для любого $f \in E$ (здесь e – единица группы G),

(2) $\|T_g f\| = \|f\|$ для всех $g \in G$ и $f \in E$.

Теперь, следуя [2], определим аппарат приближения: аналоги классов Бернштейна целых функций (экспоненциального типа) конечной степени $\le \sigma$.

Пусть X – алгебра Ли группы G, $|\cdot|$ – некоторая норма в X, $\exp : X \to G$ – экспоненциальное отображение.

Определение 1. Скажем, что вектор $f \in E$ принадлежит классу B_σ, если f является аналитическим вектором относительно представления T_g и целая вектор-функция $F(z), z = x + iy \in X + iX$, являющаяся продолжением функции $F(x) = T_{\exp(x)} f, x \in X$, имеет степень $\le \sigma$:

$$\|F(z)\| \le Ce^{\sigma|y|}.$$

Пусть $Ad : G \to GL(X)$ – присоединенное представление группы G. Всюду в дальнейшем предполагается выполненным следующее

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 01-01-00123, программы "Ведущие научные школы", проект № 00-15-96123, и программы INTAS, грант № 99-00089.

ОСНОВНОЕ ТРЕБОВАНИЕ. Присоединенное представление группы Ли G равномерно ограничено:

$$|Ad(g)x| \le const\,|x| \text{ для всех } g \in G \text{ и } x \in X.$$

Без ограничения общности полагаем $const = 1$, поскольку можно перейти к новой норме $|x|_1 = \sup\limits_{g \in G} |Ad(g)x|$.

Такому основному требованию удовлетворяют, например, компактные группы Ли, абелевы группы Ли, а также их прямые произведения.

Пусть $D(x)$ – дифференциал представления T_g:

$$D(x)f = \lim_{t \to 0} \frac{T_{\exp(tx)}f - f}{t}.$$

Пусть, далее, $E^r = \{f \in E : \exists D^{r_1}(x_1)...D^{r_k}(x_k)f,\ r_1 + ... + r_k \le r\}$ – множество всех «r-дифференцируемых» векторов и $E^\infty = \bigcap\limits_{r \in N} E^r$ – пространство Гординга представления T_g.

ТЕОРЕМА 1 (неравенство Бернштейна). Пусть $k, r_1, ..., r_k \in N$, $x_1, ..., x_k \in X$.

Тогда для любого вектора $f \in B_\sigma$ справедливо неравенство

$$\left\| D^{r_1}(x_1)...D^{r_k}(x_k)f \right\| \le \sigma^{r_1 + ... + r_k} |x_1|^{r_1} ... |x_k|^{r_k} \|f\|. \qquad (*)$$

ТЕОРЕМА 2 (обращение неравенства Бернштейна). Если для всех $k, r_1, ..., r_k \in N, x_1, ..., x_k \in X$ вектор $f \in E^\infty$ удовлетворяет неравенству Бернштейна (*), то $f \in B_\sigma$.

ТЕОРЕМА 3. B_σ – замкнутое подпространство, инвариантное относительно операторов T_g и $D(x)$.

Схема доказательства. Сначала заметим, что пространство B_σ инвариантно относительно оператора T_g. Пусть $f \in B_\sigma$. Тогда $T_g f$ – аналитический вектор и вектор-функция $F_g(x) = T_{\exp(x)} T_g f$ допускает представление

$$F_g(x) = T_g T_{g^{-1}\exp(x)g} f = T_g T_{\exp(Ad(g^{-1})x)} f = T_g F(Ad(g^{-1})x),$$

где $F(x) = T_{\exp(x)} f$ – вектор-функция из определения 1. Здесь учли, что $g_t = g^{-1}\exp(tx)g$ – однопараметрическая группа с касательным вектором $Ad(g^{-1})x$. Таким образом, $F_g(z) = T_g F(Ad(g^{-1})z), z = x + iy \in X + iX$ – продолжение функции $F_g(x)$ до целой функции на комплексном пространстве $X + iX$. Отсюда находим

$$\|F_g(z)\| = \|T_g F(Ad(g^{-1})z)\| = \|F(Ad(g^{-1})z)\| \le Ce^{\sigma|Ad(g^{-1})y|} = Ce^{\sigma|y|}$$

(применили основное требование с $const = 1$). Следовательно, $T_g f \in B_\sigma$.
Теперь рассмотрим два высказывания:

$$P_1(k): \ \forall x_1,...,x_k \in X \ \forall f \in B_\sigma \ \|D(x_1)...D(x_k)f\| \le \sigma^k |x_1|...|x_k| \|f\|,$$

$$P_2(k): f_n \in B_\sigma \wedge f_n \to f \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists D(x_1)...D(x_k)f \wedge D(x_1)...D(x_k)f_n \to D(x_1)...D(x_k)f.$$

Высказывание $P(k) = P_1(k) \wedge P_2(k)$ доказывается по индукции. База индукции основана на результатах работы [2]: аналоге неравенства Бернштейна для инфинитезимального оператора однопараметрической группы. Далее, доказываются импликации $P_1(k) \wedge P_2(k) \Rightarrow P_1(k+1)$ и $P_1(k+1) \wedge P_2(k) \Rightarrow P_2(k+1)$. Этим установлена теорема 1. В предположениях теоремы 2 сходится ряд

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{D^r(x)}{r!} f,$$

с необходимостью представляющий вектор-функцию $F(x) = T_{\exp(x)} f$. Полагая $z = x_0 + ix_1$, получаем оценку

$$\|D^r(z)f\| = \left\| \sum_{\varepsilon_1,...,\varepsilon_r = 0,1} i^\nu D(x_{\varepsilon_1})...D(x_{\varepsilon_r})f \right\| \le \sum_{\varepsilon_1,...,\varepsilon_r = 0,1} \|D(x_{\varepsilon_1})...D(x_{\varepsilon_r})f\| \le$$

$$\le \sum_{\varepsilon_1,...,\varepsilon_r = 0,1} \sigma^r |x_0|^{r-\nu} |x_1|^\nu \|f\| = \sigma^r (|x_0| + |x_1|)^r \|f\| = \sigma^r |z|^r \|f\|,$$

где ν – количество единиц в последовательности $\varepsilon_1,...,\varepsilon_r$. Следовательно, для целой вектор-функции $F(z) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{D^r(z)}{r!} f$ справедлива оценка

$$\|F(z)\| \le \|f\| e^{\sigma|z|}.$$

Поскольку $\|F(x)\| = \|f\|$, то $f \in B_\sigma$, что доказывает теорему 2. Что касается теоремы 3, то замкнутость пространства B_σ следует из высказывания $P_2(k)$ и обращения неравенства Бернштейна. Инвариантность пространства B_σ относительно оператора $D(x)$ следует из уже доказанной инвариантности относительно операторов T_g и замкнутости этого пространства.

В заключение следует отметить, что приведённые результаты могут быть обобщены на случай локальных групп Ли. На этом пути можно освободиться от основного предположения, которое необходимо в рассматриваемом глобальном случае.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Купцов Н. П.* Прямые и обратные теоремы теории приближений и полугруппы операторов // УМН. 1968. Т. 23. Вып. 4. С.117 – 178.

2. *Терехин А. П.* Ограниченная группа операторов и приближение // Дифф. ур-ния и выч. матем. 1975. Вып. 2. С. 3 – 28.

3. *Терехин А. П.* Полугруппы операторов и смешанные свойства элементов банахова пространства // Матем. заметки. 1974. Т. 16. № 1. С. 107 – 115.

УДК 517.977

Н. Ю. Трошина

РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ДИСКРЕТНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ПРИНЦИПА МАКСИМУМА

Рассмотрим следующую дискретную задачу оптимального управления:

$$x(t+1) = Ax(t) + bu(t), \ t = 0,\dots,T-1, \tag{1}$$

$$x(0) = x_0, \tag{2}$$

$$x(T) = x_T, \tag{3}$$

$$I(x,u) = \sum_{t=0}^{T-1}\left[x^*(t)Mx(t) + u^2(t)\right] \to \min. \tag{4}$$

Здесь T – фиксированный момент времени, $x(t) \in E^n (t = 0,\dots,T)$, $u(t) \in E^1 (t = 0,\dots,T-1)$, A, M – заданные матрицы размерности $n \times n$, причем, M – положительно определённая, b, x_0, x_T – заданные n-векторы; $x=\{x(0),\dots,x(T)\}$ – дискретная траектория, $u=\{u(0),\dots,u(T\text{-}1)\}$ – дискретное управление, знак * означает транспонирование.

Для рассматриваемой задачи справедлив принцип максимума Понтрягина:

ТЕОРЕМА 1. Если (x,u) – решение задачи (1) – (4) (т.е. оптимальная пара), то существуют векторы $\psi(t) \in E^n (t = 0,\dots,T)$, которые удовлетворяют уравнению

$$\psi(t) = A^*\psi(t+1) + Mx(t),$$

и при этом оптимальное управление определяется по формуле

$$u(t) = -b^*\psi(t+1), \ t = 0,\dots,T-1.$$

Доказательство можно найти в [1].

Таким образом, краевая задача принципа максимума имеет вид

$$x(t+1) = Ax(t) - bb^*\psi(t+1), \tag{5}$$

$$\psi(t) = A^*\psi(t+1) + Mx(t), \ t = 0,\dots,T-1, \tag{6}$$

$$x(0) = x_0, \tag{7}$$

$$x(T) = x_T. \tag{8}$$