2. *Терехин А. П.* Ограниченная группа операторов и приближение // Дифф. ур-ния и выч. матем. 1975. Вып. 2. С. 3 – 28.

3. *Терехин А. П.* Полугруппы операторов и смешанные свойства элементов банахова пространства // Матем. заметки. 1974. Т. 16. № 1. С. 107 – 115.

УДК 517.977

Н. Ю. Трошина

РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ДИСКРЕТНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ПРИНЦИПА МАКСИМУМА

Рассмотрим следующую дискретную задачу оптимального управления:

$$x(t+1) = Ax(t) + bu(t),\ t = 0,\dots,T-1, \tag{1}$$

$$x(0) = x_0, \tag{2}$$

$$x(T) = x_T, \tag{3}$$

$$I(x,u) = \sum_{t=0}^{T-1}\left[x^*(t)Mx(t) + u^2(t)\right] \to \min. \tag{4}$$

Здесь T – фиксированный момент времени, $x(t) \in E^n (t = 0,\dots,T)$, $u(t) \in E^1 (t = 0,\dots,T-1)$, A, M – заданные матрицы размерности $n \times n$, причем, M – положительно определённая, b, x_0, x_T – заданные n-векторы; $x=\{x(0),\dots,x(T)\}$ – дискретная траектория, $u=\{u(0),\dots,u(T\text{-}1)\}$ – дискретное управление, знак * означает транспонирование.

Для рассматриваемой задачи справедлив принцип максимума Понтрягина:

ТЕОРЕМА 1. Если (x,u) – решение задачи (1) – (4) (т.е. оптимальная пара), то существуют векторы $\psi(t) \in E^n (t = 0,\dots,T)$, которые удовлетворяют уравнению

$$\psi(t) = A^*\psi(t+1) + Mx(t),$$

и при этом оптимальное управление определяется по формуле

$$u(t) = -b^*\psi(t+1),\ t = 0,\dots,T-1.$$

Доказательство можно найти в [1].

Таким образом, краевая задача принципа максимума имеет вид

$$x(t+1) = Ax(t) - bb^*\psi(t+1), \tag{5}$$

$$\psi(t) = A^*\psi(t+1) + Mx(t),\ t = 0,\dots,T-1, \tag{6}$$

$$x(0) = x_0, \tag{7}$$

$$x(T) = x_T. \tag{8}$$

Предположим, что матрица A неособенная, и найдём решение этой краевой задачи. Сначала покажем, что при всех $t = 0,...,T-1$ решение дискретной системы (5),(6) можно выразить через $x(T), \psi(T)$.

ТЕОРЕМА 2. Если $(x(t), \psi(t))$ (t=0,…,T-1) – решение дискретной системы (5), (6), то выполняются следующие соотношения:

$$x(t) = A_t x(T) + B_t \psi(T), t = 0,...,T-1, \tag{9}$$

$$\psi(t) = C_t x(T) + D_t \psi(T), t = 0,...,T-1, \tag{10}$$

где коэффициенты A_t, B_t, C_t, D_t определяются из рекуррентных формул

$$A_{T-1} = A^{-1}, \qquad B_{T-1} = A^{-1}bb^*, \tag{11}$$

$$C_{T-1} = MA_{T-1}, \qquad D_{T-1} = A^* + MB_{T-1}, \tag{12}$$

$$A_t = A^{-1}(A_{t+1} + bb^* C_{t+1}), \qquad B_t = A^{-1}(B_{t+1} + bb^* D_{t+1}),\ t=0,\ldots,T-2, \tag{13}$$

$$C_t = A^* C_{t+1} + MA_{t+1}, \qquad D_t = A^* D_{t+1} + MB_{t+1},\ t=0,\ldots,T-2. \tag{14}$$

Доказательство. Из уравнения (5) при $t = T-1$ найдем

$$x(T-1) = A^{-1}x(T) + A^{-1}bb^*\psi(T).$$

Отсюда получим

$$x(T-1) = A_{T-1}x(T) + B_{T-1}\psi(T),$$

где A_{T-1}, B_{T-1} те же, что и в (11), то есть соотношение (9) верно при $t = T-1$.

Используя найденное значение $x(T-1)$, из (6) при $t = T-1$ определим $\psi(T-1)$:

$$\psi(T-1) = A^*\psi(T) + M\left[A_{T-1}x(T) + D_{T-1}\psi(\mathrm{T})\right].$$

Согласно (12), будем иметь

$$\psi(T-1) = C_{T-1}x(T) + B_{T-1}\psi(\mathrm{T}),$$

то есть (10) верно для $t = T-1$.

Найденные значения $x(T-1)$, $\psi(T-1)$ подставим в (5) и найдём $x(T-2)$:

$$x(T-2) = A^{-1}\left[A_{T-1}x(T) + B_{T-1}\psi(\mathrm{T}) + bb^*\left(C_{T-1}x(T) + D_{T-1}\psi(T)\right)\right].$$

Преобразуя полученный результат и используя формулы (13) для $t = T-2$, получим

$$x(T-2) = A_{T-2}x(T) + B_{T-2}\psi(T),$$

то есть соотношение (9) выполняется при $t = T-2$.

Аналогично можно показать, что соотношение (10) выполняется для $t = T-2$.

Предположим, что утверждение теоремы верно для некоторого момента времени $t(0 < t < T-2)$, и покажем, что оно верно для момента $t-1$.

Из (5) имеем

$$x(t-1) = A^{-1}\left[x(t) + bb^*\psi(t)\right].$$

Подставляя сюда значения $(x(t), \psi(t))$ из (9) и (10), получим

$$x(t-1)=A^{-1}[A_t x(T)+B_t\psi(T)+bb^* C_t x(T)+bb^* D_t\psi(T)]=A_{t-1}x(T)+B_{t-1}\psi(T),$$

где

$$A_{t-1}=A^{-1}(A_t+bb^* C_t),\quad B_{t-1}=A^{-1}(B_t+bb^* D_t).$$

Следовательно, соотношение (9) верно для момента $t-1$. Аналогично для $\psi(t-1)$ из (6), учитывая (9), (10), будем иметь

$$\psi(t-1)=A^*\psi(t)+Mx(t)=A^*[C_t x(T)+D_t\psi(T)]+M[A_t x(T)+B_t\psi(T)]=$$
$$=C_{t-1}x(T)+D_{t-1}\psi(T),$$

где $C_{t-1}=A^* C_t+MA_t$, $D_{t-1}=A^* D_t+MB_t$.

Теорема доказана.

Запишем соотношение (9) для t=0:

$$x(0)=A_0 x(T)+B_0\psi(T). \tag{15}$$

Предположим теперь, что матрица B_0 невырожденная. Тогда значение $\psi(T)$ можно выразить через значения траектории на концах, а затем найти зависимость решения $(x(t),\psi(t))$ системы (5) – (6) в любой момент времени от x_0, x_T. Тем самым краевая задача принципа максимума будет полностью решена. Следующая теорема дает алгоритм её решения.

ТЕОРЕМА 3. Если $(x(t),\psi(t))$ (t=0,…,T-1) – решение краевой задачи (5) – (8), то выполняются следующие соотношения:

$$x(t)=B_t B_0^{-1}x_0+(A_t-B_t B_0^{-1}A_0)x_T,\quad t=0,...,T-1, \tag{16}$$

$$\psi(t)=D_t B_0^{-1}x_0+(C_t-D_t B_0^{-1}A)x_T,\quad t=0,...,T-1, \tag{17}$$

$$\psi(T)=B_0^{-1}(x_0-A_0 x_T), \tag{18}$$

где коэффициенты A_t, B_t, C_t, D_t определяются из рекуррентных формул (11) – (14).

Доказательство. Очевидно, что соотношение (18) непосредственно следует из (15) и краевых условий (7), (8). Далее, равенство (16) легко получить, если подставить (18) в (9):

$$x(t)=A_t x_T+B_t B_0^{-1}(x_0-A_0 x_T)=B_t B_0^{-1}x_0+(A_t-B_t B_0^{-1}A_0)x_T,\quad t=0,...,T-1.$$

Аналогично (17) можно получить из (10) и (18):

$$\psi(t)=C_t x_T+D_t B_0^{-1}(x_0-A_0)x_T=D_t B_0^{-1}x_0+(C_t-D_t B_0^{-1}A)x_T,\quad t=0,...,T-1.$$

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Трошина Н. Ю.* Принцип максимума и задача синтеза для линейных дискретных систем: Дис. … канд. физ.-мат. наук. Саратов, 1997. 144 с.