УДК 517.51

В. И. Филиппов

ПОЧТИ ВСЮДУ СХОДЯЩИЕСЯ РЯДЫ ПО СИСТЕМАМ, ОБРАЗОВАННЫМ ИЗ СЖАТИЙ И СДВИГОВ ОДНОЙ ФУНКЦИИ В $S(0, 1)$

Рассматриваются функциональные системы вида

$$\{\psi_{n,k}(t)\} = \{\psi(2^n t - k)\}, \quad n = 0,1, \dots, \quad k = 0,1, \dots, 2^n - 1, \tag{1}$$

где $\psi(t) \geq 0$, $t \in (0,1)$, $\psi \in C(0,1)$, $\psi(t) = 0$, $t \notin (0,1)$, $\|\psi\|_\infty \neq 0$, в пространстве $S(0,1)$ почти всюду конечных измеримых функций.

П. Л. Ульянов [1] исследовал систему Фабера-Шаудера в классах $\varphi(L)$ и сформулировал следующую задачу. Для каких других функциональных систем возможно представление в виде ряда элементов классов $\varphi(L)$? В статье рассматривается эта задача П. Л. Ульянова [1, 2].

Исследуется, является ли данная система функций системой представления в пространстве $S(0,1)$ в смысле сходимости почти всюду? Полученные результаты рассматриваются в пространстве $S(0,1)$, а в работе [3] рассматриваются более общие системы, но в пространствах L^p, $0 < p < \infty$. В работе [4] получены результаты для подсистем системы Фабера-Шаудера в пространствах E_φ, а в [5] для подсистем системы Фабера-Шаудера в смысле сходимости почти всюду. Подсистемы системы Фабера-Шаудера в смысле сходимости по φ-расстоянию рассмотрены в [6]. Заметим, что система Фабера-Шаудера без первых двух элементов является частным случаем системы (1) для исследуемых нами вопросов.

Приведём понятия и утверждения, которые понадобятся нам в дальнейшем.

Следуя А. А. Талаляну [7], дадим

Определение 1. Система элементов $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ F-пространства $E(E, \|\cdot\|)$, где множество E вещественное [8, с. 36, 81], называется системой представления (с. п.) в пространстве E, если для произвольного элемента $f \in E$ существует ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k$ такой, что

$$\lim_{n\to\infty} \left\| f - \sum_{k=1}^{n} c_k f_k \right\| = 0,$$

где $\{c_k\}$ – последовательность действительных чисел.

Определение 2. Система элементов $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ F-пространства $E(E, \|\cdot\|)$, где множество E вещественное, называется системой представления (с. п.) в пространстве E в смысле сходимости почти всюду (п. в.), если для произвольного элемента $f \in E$ существует ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k$, где $\{c_k\}$ – последовательность действительных чисел, который сходится п. в. к f.

Пусть Φ совокупность чётных, конечных, неубывающих на полупрямой $[0,\infty)$ функций таких, что для функции φ выполнены условия

$$\varphi(t) \in \Phi, \quad \varphi(0=0, \ \varphi(t) > 0, \quad t > 0, \quad \varphi(t) \in C[0,\infty). \tag{2}$$

Через $\varphi(L)$ будем обозначать множество всех тех измеримых функций $f(x)$ на $(0,1)$, для которых

$$\int_0^1 \varphi(f(t))dt < \infty$$

(см. [1], [9, с. 1 – 5]).

Если f и g принадлежат классу $\varphi(L)$, то величину $\rho_\varphi(f,g) = \int_0^1 \varphi(f-g)dt$ условно назовём φ-расстоянием. Последовательность функций $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ из класса $\varphi(L)$ называется сходящейся по φ-расстоянию к функции $f \in \varphi(L)$, если $(f - f_n) \in \varphi(L)$ для $n \geq n_0$ при некотором $n_0 \in N$, и

$$\lim_{n\to\infty} \rho_\varphi(f - f_n) = 0.$$

Класс $\varphi(L)$ в общем случае не является линейным. Если класс $\varphi(L)$ пополнить по линейности, то получим множество $\varphi^*(L)$, в котором можно ввести квазинорму (φ-норму) элементов с помощью функционала

$$\| f \|_\varphi = \inf\left\{u > 0 : \int_0^1 \varphi\left(\frac{f(t)}{u}\right)dt < u\right\}, \quad f \in \varphi^*(L), \tag{3}$$

так, что $\varphi^*(L)$ станет F-пространством. В этом случае из сходимости по φ-норме следует сходимость по φ-расстоянию для элементов из класса $\varphi(L)$ (см. [9]).

Через E_φ обозначим замыкание в $\varphi^*(L)$ множества ограниченных ступенчатых функций.

Пространство E_φ является сепарабельным F-пространством (см. [9]).

ТЕОРЕМА 1. Подсистема $\{\psi_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ системы

$$\{\psi_{n,k}(t)\} = \{\psi(2^n t - k)\}, \quad n = 0,1,\ldots, \quad k = 0,1,\ldots,2^n - 1,$$

где $\psi(t) \geq 0, \ t \in (0,1), \quad \psi \in C(0,1), \quad \psi(t) = 0, \ t \notin (0,1), \quad 0 \neq \|\psi\|_\infty < \infty$, является системой представления в E_φ тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \forall N \in . \quad \exists m > N :$$

$$mes\left\{t: \sum_{i=N}^{m} \psi_{n_i}(t) \neq 0\right\} > 1-\varepsilon.$$

Из доказательства теоремы 1 и того, что $S(0,1) = \sum\limits_{\varphi\in\Phi} E_{\varphi}$, следует

ТЕОРЕМА 2. Подсистема $\{\psi_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ системы

$$\{\psi_{n,k}(t)\} = \{\psi(2^n t - k)\}, \quad n = 0,1,\ldots, \quad k = 0,1,\ldots,2^n - 1,$$

где $\psi(t) \geq 0$, $t \in (0,1)$, $\psi \in C(0,1)$, $\psi(t) = 0$, $t \notin (0,1)$, $0 \neq \|\psi\|_{\infty} < \infty$, является системой представления в $S(0,1)$ в смысле сходимости почти всюду тогда и только тогда, когда

$$\forall\varepsilon > 0 \ \ \forall N \in . \quad \exists m > N: \qquad mes\left\{t: \sum_{i=N}^{m} \psi_{n_i}(t) \neq 0\right\} > 1-\varepsilon.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ульянов П. Л.* Представление функций рядами и классы $\Phi(L)$ // Успехи матем. наук. 1972. Т. 27. № 2. С. 3 – 52.

2. *Ульянов П. Л.* Замечания о сходимости в среднем // Матем. заметки. 1977. Т. 21. №. 6. С. 807 – 816.

3. *Filippov V., Oswald P.* Representation in L^p by series of translates and dilates of one function // J. appr. Theory. 1995. Vol. 82. № 1. P. 15 – 29.

4. *Филиппов В. И.* О подсистемах системы Фабера-Шаудера в пространствах E_{φ} // Изв. вузов. Сер. Математика. 1991. № 2. С. 78 – 85.

5. *Zink R.* On a theorem of Goffman concerning Schauder series // Proc. Amer. Math. Soc. 1969. Vol. 21. № 3. P. 523 – 529.

6. *Кротов В. Г.* Представление измеримых функций по системе Фабера-Шаудера и универсальные ряды // Изв. АН СССР. Сер. Математика. 1977. Т. 41. № 1. С. 215–229.

7. *Талалян А. А.* Об аппроксимационных свойствах некоторых неполных систем // Матем. сб. 1981. Т. 115(157). № 4. С. 499 – 541.

8. *Иосида К.* Функциональный анализ. М.: Мир,1967.

9. *Musielak J.* Orlicz Spaces and Modular Spaces // Lecture Notes in Math. № 1034. Berlin Heiddberg: Springer-Verlag, 1983.

УДК 514.112.4; 511.216

В. Е. Фирстов

ОБОБЩЕНИЯ ТЕОРЕМЫ ПИФАГОРА, РЕКУРРЕНТНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ИХ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ОБРАЗЫ

В статье, исходя из обобщения построений при доказательстве теоремы Пифагора, устанавливается связь между линейными рекуррентными уравнениями и алгебраическими кривыми.