$$mes\left\{t:\sum_{i=N}^{m}\psi_{n_i}(t)\neq 0\right\}>1-\varepsilon.$$

Из доказательства теоремы 1 и того, что $S(0,1)=\sum_{\varphi\in\Phi}E_{\varphi}$, следует

ТЕОРЕМА 2. Подсистема $\{\psi_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ системы

$$\{\psi_{n,k}(t)\}=\{\psi(2^n t-k)\},\quad n=0,1,\ldots,\quad k=0,1,\ldots,2^n-1,$$

где $\psi(t)\geq 0,\ t\in(0,1),\ \psi\in C(0,1),\ \psi(t)=0,\ t\notin(0,1),\ 0\neq\|\psi\|_{\infty}<\infty$, является системой представления в $S(0,1)$ в смысле сходимости почти всюду тогда и только тогда, когда

$$\forall\varepsilon>0\ \ \forall N\in.\quad \exists m>N:\qquad mes\left\{t:\sum_{i=N}^{m}\psi_{n_i}(t)\neq 0\right\}>1-\varepsilon.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ульянов П. Л.* Представление функций рядами и классы $\Phi(L)$ // Успехи матем. наук. 1972. Т. 27. № 2. С. 3 – 52.

2. *Ульянов П. Л.* Замечания о сходимости в среднем // Матем. заметки. 1977. Т. 21. №. 6. С. 807 – 816.

3. *Filippov V.*, *Oswald P.* Representation in L^p by series of translates and dilates of one function // J. appr. Theory. 1995. Vol. 82. № 1. P. 15 – 29.

4. *Филиппов В. И.* О подсистемах системы Фабера-Шаудера в пространствах E_{φ} // Изв. вузов. Сер. Математика. 1991. № 2. С. 78 – 85.

5. *Zink R.* On a theorem of Goffman concerning Schauder series // Proc. Amer. Math. Soc. 1969. Vol. 21. № 3. P. 523 – 529.

6. *Кротов В. Г.* Представление измеримых функций по системе Фабера-Шаудера и универсальные ряды // Изв. АН СССР. Сер. Математика. 1977. Т. 41. № 1. С. 215–229.

7. *Талалян А. А.* Об аппроксимационных свойствах некоторых неполных систем // Матем. сб. 1981. Т. 115(157). № 4. С. 499 – 541.

8. *Иосида К.* Функциональный анализ. М.: Мир,1967.

9. *Musielak J.* Orlicz Spaces and Modular Spaces // Lecture Notes in Math. № 1034. Berlin Heiddberg: Springer-Verlag, 1983.

УДК 514.112.4; 511.216

В. Е. Фирстов

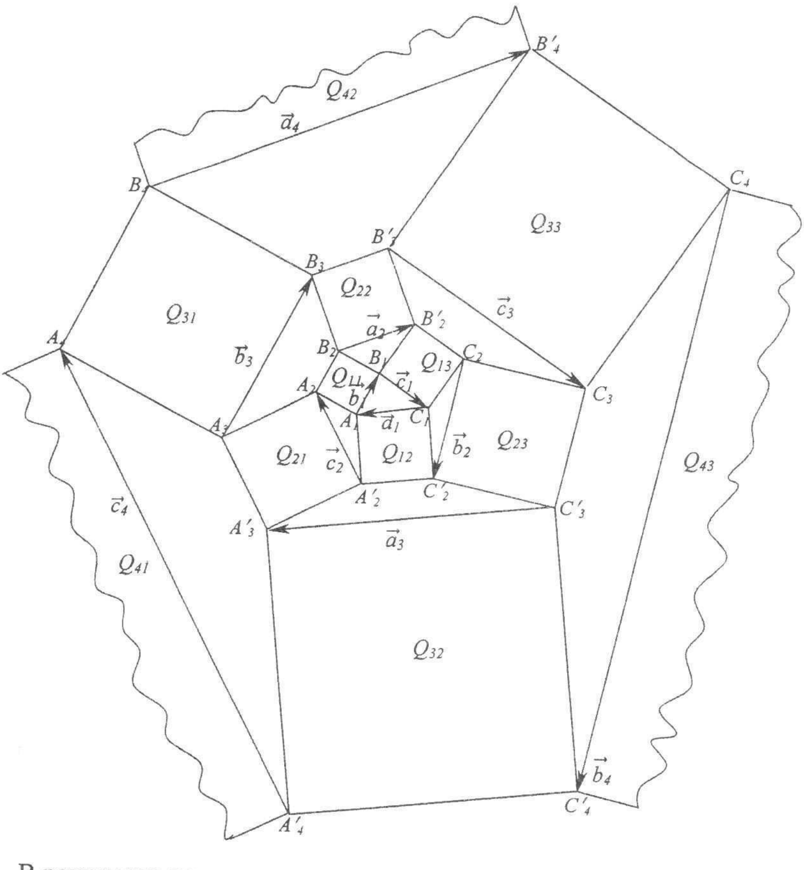
ОБОБЩЕНИЯ ТЕОРЕМЫ ПИФАГОРА, РЕКУРРЕНТНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ИХ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ОБРАЗЫ

В статье, исходя из обобщения построений при доказательстве теоремы Пифагора, устанавливается связь между линейными рекуррентными уравнениями и алгебраическими кривыми.

1. Пусть на сторонах $\Delta A_1B_1C_1$ строятся квадраты $Q_{11};Q_{12};Q_{13}$, подобно тому, как это делал Евклид при доказательстве теоремы Пифагора, и далее реализуется цепочка построений квадратов по схеме

$$\Delta A_1B_1C_1 \to (Q_{11};Q_{12};Q_{13}) \to (Q_{21};Q_{22};Q_{23}) \to \ldots \to (Q_{k1};Q_{k2};Q_{k3}) \to \ldots \quad (1)$$

так, как показано на рисунке. Сеть квадратов (1) назовем обобщёнными пифагоровыми построениями (ОПП), в которых выделяются шесть серий квадратов: серии $Q_{11};Q_{31};\ldots;Q_{2j-1,l}$ назовем нечётными, а серии $Q_{2l};Q_{4l};\ldots;$ $Q_{2j,l}$ – чётными, где первый индекс определяет шаг ОПП, а второй индекс l=1;2;3 указывает место квадрата в этом шаге (см. рисунок).



В результате доказываются следующие утверждения.

ТЕОРЕМА 1 (обобщённая теорема Пифагора). Если $\Delta A_1B_1C_1$ – прямоугольный ($\angle A = 90°$), то при ОПП выполняются соотношения

$$S(Q_{k1}) + S(Q_{k2}) = S(Q_{k3}), \quad (2)$$

где $k = 2j - 1$, $j \in N$, $S(Q_{kl})$ – площадь квадрата Q_{kl}.

ТЕОРЕМА 2. При ОПП соответствующие стороны квадратов одноимённых нечётных и чётных серий образуют рекуррентные последовательности, описываемые уравнениями

$$\overrightarrow{u_{2n+3}} = 5\overrightarrow{u_{2n+1}} - \overrightarrow{u_{2n-1}}, \quad \overrightarrow{v_{2(n+2)}} = 5\overrightarrow{v_{2(n+1)}} - \overrightarrow{v_{2n}}, \tag{3}$$

причём, векторы в уравнениях (3) – сонаправленные;

$$\overrightarrow{u_{2n-1}} \in \{\overrightarrow{a_{2n-1}}; \overrightarrow{b_{2n-1}}; \overrightarrow{c_{2n-1}}\}; \quad \overrightarrow{v_{2n}} \in \{\overrightarrow{a_{2n}}; \overrightarrow{b_{2n}}; \overrightarrow{c_{2n}}\}, \quad \overrightarrow{u_3} = 4\overrightarrow{u_1}, \quad \overrightarrow{v_4} = 5\overrightarrow{v_2}.$$

ТЕОРЕМА 3. При ОПП одноимённые вершины квадратов соответствующих серий (например, $A_1;A_3;\ldots;A_{2j-1}$) располагаются по ветвям соответствующих гипербол.

Например, вершины $A_1;A_3;\ldots;A_{2j-1}$ в базисе $\left(\overrightarrow{A_1A_2}; \overrightarrow{A_2A_3}\right)$ лежат на гиперболе $x^2+3xy-3y^2+x-2y=0$.

2. Рассмотрим рекуррентное уравнение k-го порядка

$$u_{n+k} = a_1u_{n+k-1} + a_2u_{n+k-2} + \ldots + a_ku_n, \tag{4}$$

с числовыми коэффициентами $a_1; \ldots ; a_k$. Пусть $\{\alpha_{n1}\};\ldots;\{\alpha_{nk}\}$ – семейство последовательностей, порождённых уравнением (4) с помощью векторов $\overrightarrow{\alpha_1}(\alpha_{11};\ldots;\alpha_{k1});\ldots;\overrightarrow{\alpha_k}(\alpha_{11};\ldots;\alpha_{kk})$ из пространства решений W_k уравнения (4) в базисе $\left(\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{e_2};\ldots;\overrightarrow{e_k}\right)$. В пространстве W_k определим вектор-функцию

$$\overrightarrow{r_n} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\left(\alpha_{ij}\overrightarrow{\mathrm{e}_{\mathrm{j}}}\right) \tag{5}$$

и исследуем её координаты $(x_{n1};\ldots; x_{nk})$ в зависимости от выбранных векторов $\overrightarrow{\alpha_1};\ldots;\overrightarrow{\alpha_k}$ и дискриминанта D характеристического уравнения для (4).

Если $D\neq 0$, то члены выбранных последовательностей определяются выражением [1]:

$$\overrightarrow{\alpha_n} = A\overrightarrow{z_n}, \tag{6}$$

где $\overrightarrow{\alpha_n}(\alpha_{n1};\ldots;\alpha_{nk});\overrightarrow{z_n}(z_1^{n-1};\ldots;z_k^{n-1});z_l, l=\overline{1;k}$ – корни характеристического уравнения для (4); A: $C^k \to W_k$ – линейный оператор с матричными элементами A_{lj}, $1\leq l; j\leq k$, определяемыми значениями $\alpha_{n1};\ldots;\alpha_{nk}$, $1\leq n\leq k$.

Пусть оператор A – невырожденный и $a_1+a_2+\ldots+a_k\neq 1$. Тогда для координат $\overrightarrow{r_n}$ имеем следующее выражение:

$$x_{nj} = \sum_{i=1}^{n}\alpha_{ij} = \sum_{l=1}^{k}\frac{A_{lj}(z_l^n - 1)}{z_l - 1}, \quad j = \overline{1;k}. \tag{7}$$

После обращения (7) и последующих преобразований получаем следующее уравнение алгебраической кривой k-го порядка [2]:

$$\prod_{l=1}^{k}[(z_l - 1)\sum_{j=1}^{k}(X_j\Delta_{lj})] = 1, \tag{8}$$

где $X_j = [(-1)^{k+1}a_k]^{-\frac{n}{k}} \cdot \frac{x_{nj} + t_j}{\Delta}$; Δ – определитель матрицы оператора A,

Δ_{lj} – соответствующие алгебраические дополнения для A_{lj}; t_j определяются из системы

$$(z_l - 1)\sum_{j=1}^{k}(t_j \Delta_{lj}) = \Delta,\ 1 \le l \le k.$$

Не вдаваясь в подробности [2], отметим, что случай $a_1+a_2+...+a_k = 1$ снижает порядок алгебраической кривой (8) на 1. Случай, когда оператор A – вырожденный ранга $0 \le s < k$, если применить известную теорему о структуре вырожденного линейного оператора [3], приводит к алгебраической кривой типа (8), но порядка s.

Анализируя уравнение (8), можно видеть, что для уравнения (4) с рациональными коэффициентами при значениях $k \mid n$ получаются рациональные решения и таким образом открывается возможность отыскания диофантовых решений алгебраических уравнений определённого класса с помощью рекуррентных последовательностей.

Случай, когда D=0, в принципе, рассматривается аналогично, но несколько иначе, так как представление (6) будет иным (см. [2]).

В заключение отметим, что алгебраические образы рекуррентных уравнений (4) при k=2 – это конические сечения (в зависимости от дискриминанта D), включая вырожденные случаи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Маркушевич А. И.* Возвратные последовательности. М.: Наука, 1983.
2. *Фирстов В. Е.* Рекуррентные последовательности и их пространственные алгебраические образы. Саратов, 2000. 17 с. Деп. в ВИНИТИ 10.05.00. № 1352-В00.
3. *Ефимов Н. В., Розендорн Э. Р.* Линейная алгебра и многомерная геометрия. М.: Наука, 1970.

УДК 517.984

В. А. Халова

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕЗОЛЬВЕНТЫ ОДНОГО КЛАССА ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ*

В пространстве $L_2[0,1]$ рассмотрим оператор вида

$$Af(x) = A_0 f(x) + \sum_{k=1}^{m} g_k(x)(f, v_k), \qquad x \in [0,1], \tag{1}$$

где $A_0 f = \alpha_1 \int_0^x (x-t) f(t)dt + \alpha_2 \int_0^{1-x} (1-x-t) f(t)dt$, $\quad (f, v_k) = \int_0^1 f(t) v_k(t)dt$,

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 00-01-00075, и программы “Ведущие научные школы”, проект № 00-15-96123.