УДК 518:517.948

Г. В. Хромова

ВЫБОР ПАРАМЕТРА РЕГУЛЯРИЗАЦИИ В МЕТОДЕ ТИХОНОВА*

В данной статье получены условия согласования параметра регуляризации с погрешностью исходных данных, необходимые и достаточные для сходимости приближенных решений к точному в методе регуляризации А. Н. Тихонова для трёх классов уравнений первого рода.

Пусть мы имеем уравнение первого рода

$$Au = f, \tag{1}$$

где $A \in (C^{(l)}[a,b] \to L_2[a,b])$, A^{-1} существует, но неограничен, а правая часть задана её δ-приближением $f_\delta(x)$ в $L_2[a,b]$.

Рассмотрим метод регуляризации Тихонова l-го порядка гладкости [1]. Обозначим через $R_{\alpha,p}$, $p=0,1,...,l$ регуляризирующие семейства операторов, обеспечивающих равномерную сходимость к $u^{(p)}(x)$, и рассмотрим величины

$$\Delta(\delta, R_{\alpha,p}, u) = \sup\left\{\left\|R_{\alpha,p} f_\delta - u^{(p)}\right\|_{C[a,b]} : \left\|f_\delta - Au\right\|_{L_2} \le \delta\right\}, \quad p = 0,..., l.$$

Далее рассмотрим три типа уравнения (1):

а) с оператором вложения из $C^{(l)}[-\pi,\pi]$ в $L_2[-\pi,\pi]$ при дополнительном условии: $u(-\pi)=u(\pi)$ [2];

б) с интегральным оператором, ядро которого есть функция Грина обыкновенного линейного дифференциального оператора порядка m общего вида [3];

в) с интегральным оператором, ядро которого терпит разрыв на линии $t=x$ при дополнительных условиях, приведенных в [4].

В последнем случае считаем $l=0$; в случаях б) и в) считаем $[a,b]=[\varepsilon,1-\varepsilon]$, $\varepsilon>0$.

ТЕОРЕМА. Для того чтобы $\Delta(\delta, R_{\alpha,p}, u) \to 0$ при $\delta \to 0$, необходимо и достаточно так согласовать α с δ, чтобы $\delta(\alpha(\delta))^{-\gamma_p} \to 0$ при $\delta \to 0$, где $\gamma_p = (2p+1)[4(l+1)]^{-1}$ в случае а); $\gamma_p = [2(m+p)+1][4(m+l+1)]^{-1}$ в случае б); $\gamma_p = \dfrac{3}{8}$ в случае в); $p=0,1,..., l$ в случаях а) и б) и $p=0$ в случае в).

Приведём схему доказательства.

*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 00-01-00237 и программы "Ведущие научные школы", проект № 00-15-96123.

Известно [5], что необходимым и достаточным условием сходимости $\Delta(\delta, R_{\alpha,p}, u) \to 0$ при $\delta \to 0$ является такое согласование α с δ, при котором $\alpha(\delta) \to 0$ и $\|R_{\alpha,p}\|_{L_2 \to C}\delta \to 0$ при $\delta \to 0$. Для метода регуляризации Тихонова справедливы следующие представления [3]:

$$\|R_{\alpha,p}\|_{L_2 \to C} = \alpha^{-1/2} \sup_{a \le x \le b} \left(\int_a^b \frac{\partial^p}{\partial x^p} K_\alpha(x,\xi) \frac{\partial^p}{\partial x^p} g(x,\xi,\alpha) d\xi\right)^{1/2},$$

где $K_\alpha(x,\xi)$ – ядро оператора $R_{\alpha,0}A$, $g(x,\xi,\alpha)$ определена в [3].

На основании этого представления для указанных типов уравнений получены двусторонние оценки, асимптотические при $\alpha \to 0$:

$$C_1 \alpha^{-\gamma_p} \le \|R_{\alpha,p}\|_{L_2 \to C} \le C_2 \alpha^{-\gamma_p},$$

γ_p – приведены в теореме.

Из указанных оценок вытекает утверждение теоремы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тихонов А. Н.* О регуляризации некорректно поставленных задач // ДАН СССР. 1963. Т. 153. № 1. С. 49 – 52.
2. *Хромова Г. В.* О скорости сходимости приближений функций на некоторых компактных классах и задаче восстановления функций // Вестн. МГУ. Сер. 15. 1993. № 1. С. 13 – 18.
3. *Хромова Г. В.* Об оценке погрешности метода регуляризации Тихонова для интегральных уравнений с ядром Грина // Вестн. МГУ. Сер. 15. 1992. № 4. С. 22 – 27.
4. *Хромова Г. В.* О методе регуляризации Тихонова для интегрального уравнения с разрывным ядром // Обратные и некорректно поставленные задачи: Тезисы докл. конф. Москва. 1998. М: Изд-во МГУ. С. 87.
5. *Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. П.* Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978.

УДК 517.5

В. И. Шевцов

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ НЕПОЛНОЙ СИСТЕМЫ ЭКСПОНЕНТ

Системы экспонент изучались многими математиками. Фундаментальные исследования последовательностей полиномов из экспонент проведены А. Ф. Леонтьевым [1, 2].

Пусть $L(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \lambda^k$ – целая функция порядка ρ, $0 < \rho < 1$. Обозначим через C_ρ класс бесконечно дифференцируемых на отрезке $[-1;1]$ функций таких, что