Известно [5], что необходимым и достаточным условием сходимости $\Delta(\delta, R_{\alpha,p}, u) \to 0$ при $\delta \to 0$ является такое согласование α с δ, при котором $\alpha(\delta) \to 0$ и $\|R_{\alpha,p}\|_{L_2 \to C}\delta \to 0$ при $\delta \to 0$. Для метода регуляризации Тихонова справедливы следующие представления [3]:

$$\|R_{\alpha,p}\|_{L_2 \to C} = \alpha^{-1/2} \sup_{a \le x \le b} \left(\int_a^b \frac{\partial^p}{\partial x^p} K_\alpha(x,\xi) \frac{\partial^p}{\partial x^p} g(x,\xi,\alpha) d\xi\right)^{1/2},$$

где $K_\alpha(x,\xi)$ – ядро оператора $R_{\alpha,0}A$, $g(x,\xi,\alpha)$ определена в [3].

На основании этого представления для указанных типов уравнений получены двусторонние оценки, асимптотические при $\alpha \to 0$:

$$C_1\alpha^{-\gamma_p} \le \|R_{\alpha,p}\|_{L_2 \to C} \le C_2\alpha^{-\gamma_p},$$

γ_p – приведены в теореме.

Из указанных оценок вытекает утверждение теоремы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тихонов А. Н.* О регуляризации некорректно поставленных задач // ДАН СССР. 1963. Т. 153. № 1. С. 49 – 52.
2. *Хромова Г. В.* О скорости сходимости приближений функций на некоторых компактных классах и задаче восстановления функций // Вестн. МГУ. Сер. 15. 1993. № 1. С. 13 – 18.
3. *Хромова Г. В.* Об оценке погрешности метода регуляризации Тихонова для интегральных уравнений с ядром Грина // Вестн. МГУ. Сер. 15. 1992. № 4. С. 22 – 27.
4. *Хромова Г. В.* О методе регуляризации Тихонова для интегрального уравнения с разрывным ядром // Обратные и некорректно поставленные задачи: Тезисы докл. конф. Москва. 1998. М: Изд-во МГУ. С. 87.
5. *Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. П.* Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978.

УДК 517.5

В. И. Шевцов

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ НЕПОЛНОЙ СИСТЕМЫ ЭКСПОНЕНТ

Системы экспонент изучались многими математиками. Фундаментальные исследования последовательностей полиномов из экспонент проведены А. Ф. Леонтьевым [1, 2].

Пусть $L(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k\lambda^k$ – целая функция порядка ρ, $0 < \rho < 1$. Обозначим через C_ρ класс бесконечно дифференцируемых на отрезке $[-1;1]$ функций таких, что

$$\forall f \in C_\rho \quad \exists m_n \quad \forall n \geq 0 \quad \left| f^{(n)}(x) \right| \leq A_f^{n+1} m_n, \quad x \in [-1;1],$$

где A_f – некоторая постоянная, которая зависит только от функции $f(x)$, $\{m_n\}$ – последовательность неотрицательных чисел такая, что выполнено условие

$$\alpha = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln m_n}{n \ln n} < \frac{1}{\rho}.$$

Обозначим нули функции $L(\lambda)$ через $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, расположив их в порядке неубывания их модулей. Будем предполагать, что все нули функции $L(\lambda)$ простые. Рассмотрим систему экспонент

$$e^{\lambda_1 z},\ e^{\lambda_2 z},\ \ldots, e^{\lambda_k z}, \ldots \tag{1}$$

В данной статье рассматривается задача о построении функции $F(x) \in C_\rho$ такой, что $F(x) \neq 0$ и выполнено следующее условие:

$$\int_{-1}^{1} F(x) e^{\lambda_k x} = 0, \quad \forall k \in N. \tag{2}$$

Для построения такой функции положим

$$L_1(\lambda) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_k^2} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n \lambda^n. \tag{3}$$

Функция $L_1(\lambda)$ – целая порядка не выше ρ.

Рассмотрим интерполирующую функцию

$$\omega_{L_1}(\mu, f, x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\mu) f^{(n)}(x), \quad x \in [-1;1], \tag{4}$$

где $a_n(\mu)$ – тейлоровские коэффициенты функции

$$\frac{L_1(\mu) - L_1(t)}{\mu - t} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\mu) t^n.$$

Свойства интерполирующей функции (4) подробно изучены в [3, 4]. Отметим некоторые из этих свойств, которые необходимы в дальнейшем.

1. Если $f \in C_\rho$, то $\omega_{L_1}(\mu, f, x)$ является целой фукцией комплексного переменного μ, $\forall x \in [-1;1]$.

2. Если $f \in C_\rho$, тогда справедливо равенство

$$\omega_{L_1}(\mu, f, 0) e^{\mu x} + e^{\mu x} \int_0^x M_{L_1}[f(t)] e^{-\mu t} dt = \tag{5}$$

$$= \omega_{L_1}(\mu, f, x) + L_1(\mu) e^{\mu x} \int_0^x f(t) e^{-\mu t} dt,$$

$x \in [-1;1]$, где

$$M_{L_1}[f(x)]=\sum_{n=0}^{\infty}d_n f^{(n)}(x). \qquad (6)$$

Перейдем к построению функции $F(x)\in C_\rho$ такой, что выполнено (2). Положим $A_n=(n+1)^{(n+1)\alpha}$, $1<\alpha<\frac{1}{\rho}$. Ясно, что

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A_n}{A_{n+1}}<\infty .$$

Поэтому существует неотрицательная чётная бесконечно дифференцируемая на отрезке $[-1;1]$ функция такая, что

1) $\Phi(o)>0$, $\Phi^{(n)}(\pm 1)=0$ (n=0,1,2,…);

2) $\left|\Phi^{(n)}(x)\right|\le B_\Phi^{n+1}A_n$, $\quad x\in[-1;1]$,

где B_Φ – некоторая постоянная, которая зависит только от функции $\Phi(x)$ [5, с.105].

Положим, далее,

$$F(x)=M_{L_1}[\Phi(x)]. \qquad (7)$$

Справедлива

ТЕОРЕМА. Функция $F(x)$, определяемая равенством (7), принадлежит классу C_ρ и выполнено следующее условие:

$$\int_{-1}^{1}F(x)e^{\lambda_k x}\,dx=0,\quad \forall k\in N.$$

Доказательство. Так как функция $\Phi(x)$ принадлежит классу C_ρ, то функция $F(x)$ также принадлежит этому классу [3]. Покажем, что $F(x)$ тождественно не равна нулю. Предположим противное, т.е. $F(x)\equiv 0$, $x\in[-1;1]$. Тогда функция $\Phi(x)$ на отрезке $[-1;1]$ должна удовлетворять следующему уравнению бесконечного порядка: $M_{L_1}[\Phi(x)]=0$. В статье [6] показано, что класс функций, удовлетворяющих такому уравнению, является квазианалитическим. Поскольку $\Phi^{(n)}(\pm 1)=0,(n=0,1,2,...)$, то $\Phi(x)\equiv 0$ и мы приходим к противоречию.

Докажем, что выполнено (2). Для этого воспользуемся свойством 2 интерполирующей функции $\omega_{L_1}(\mu,f,x)$. Положим в равенстве (5) $x=1, f(t)=F(t)$.

$$\omega_{L_1}(\mu,F,0)e^{\mu}+e^{\mu}\int_0^1 F(t)e^{-\mu t}dt= \qquad (8)$$

$$=L_1(\mu)e^{\mu}\int_0^1 F(t)e^{-\mu t}dt.$$

Здесь мы учли, что $\omega_{L_1}(\mu,\Phi,1)=0$, так как $\Phi^{(n)}(\pm 1)=0$, $(n=0,1,2,\ldots)$.

Из (8) находим при $\mu=-\lambda_n$

$$\omega_{L_1}(-\lambda_n,\Phi,0)=\int_0^1 F(t)e^{\lambda_n t}dt. \qquad (9)$$

Положим в равенстве (5) $x=-1, f(t)=\Phi(t)$, $\mu=-\lambda_n$ получим

$$\omega_{L_1}(-\lambda_n,\Phi,0)=\int_0^{-1} F(t)e^{\lambda_n t}dt, \qquad (10)$$

так как $\Phi^{(n)}(-1)=0$ $(n=0,1,2,\ldots)$.

Из (9) и (10) следует, что $\int_{-1}^{1} F(t)e^{\lambda_n t}dt=0,\ \forall n\in N$.

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Леонтьев А. Ф.* Последовательность полиномов из экспонент. М., 1980.

2. *Леонтьев А. Ф.* Ряды экспонент. М., 1976.

3. *Шевцов В. И.* Об аппроксимации решений уравнения бесконечного порядка посредством элементарных решений. Саратов, 2000. 9 с. Деп. в ВИНИТИ. 06.06.00. № 1614-В00.

4. *Шевцов В. И.* Уравнения бесконечного порядка в одном квазианалитическом классе функций // Математика, механика и математическая кибернетика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1999. С. 72 – 75.

5. *Мандельбройт С.* Примыкающие ряды. Регуляризация последовательностей. Применения. М., 1955.

6. *Шевцов В. И.* Об одном квазианалитическом классе функций. Саратов, 2000. 15 с. Деп. в ВИНИТИ 20.04.00. №1103-В00.

УДК 517.984

В. А. Юрко

О КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ С ОСОБЕННОСТЬЮ ВНУТРИ ИНТЕРВАЛА*

1. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$-y''+\left(\frac{\nu_0}{(x-a)^2}+q(x)\right)y=\lambda y,\quad 0<x<T,\quad a\in(0,T). \qquad (1)$$

Пусть $\nu_0=\nu^2-1/4$, $\operatorname{Re}\nu>0$, $\nu\notin \mathbf{N}$, $q(x)|x-a|^{\min(0,1-2\operatorname{Re}\nu)}\in L(0,T)$.

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 00-01-00741.