Здесь мы учли, что $\omega_{L_1}(\mu,\Phi,1)=0$, так как $\Phi^{(n)}(\pm 1)=0$, $(n=0,1,2,...)$.

Из (8) находим при $\mu=-\lambda_n$

$$\omega_{L_1}(-\lambda_n,\Phi,0)=\int_0^1 F(t)e^{\lambda_n t}dt. \qquad (9)$$

Положим в равенстве (5) $x=-1, f(t)=\Phi(t)$, $\mu=-\lambda_n$ получим

$$\omega_{L_1}(-\lambda_n,\Phi,0)=\int_0^{-1} F(t)e^{\lambda_n t}dt, \qquad (10)$$

так как $\Phi^{(n)}(-1)=0$ $(n=0,1,2,...)$.

Из (9) и (10) следует, что $\int_{-1}^{1} F(t)e^{\lambda_n t}dt=0, \forall n\in N$.

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Леонтьев А. Ф.* Последовательность полиномов из экспонент. М., 1980.
2. *Леонтьев А. Ф.* Ряды экспонент. М., 1976.
3. *Шевцов В. И.* Об аппроксимации решений уравнения бесконечного порядка посредством элементарных решений. Саратов, 2000. 9 с. Деп. в ВИНИТИ. 06.06.00. № 1614-В00.
4. *Шевцов В. И.* Уравнения бесконечного порядка в одном квазианалитическом классе функций // Математика, механика и математическая кибернетика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1999. С. 72 – 75.
5. *Мандельбройт С.* Примыкающие ряды. Регуляризация последовательностей. Применения. М., 1955.
6. *Шевцов В. И.* Об одном квазианалитическом классе функций. Саратов, 2000. 15 с. Деп. в ВИНИТИ 20.04.00. №1103-В00.

УДК 517.984

В. А. Юрко

О КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ С ОСОБЕННОСТЬЮ ВНУТРИ ИНТЕРВАЛА*

1. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$-y''+\left(\frac{\nu_0}{(x-a)^2}+q(x)\right)y=\lambda y, \quad 0<x<T, \quad a\in(0,T). \qquad (1)$$

Пусть $\nu_0=\nu^2-1/4$, $\operatorname{Re}\nu>0$, $\nu\notin\mathbf{N}$, $q(x)|x-a|^{\min(0,1-2\operatorname{Re}\nu)}\in L(0,T)$.

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 00-01-00741.

В статье исследуется несамосопряженная краевая задача l для дифференциального уравнения (1) с граничными условиями

$$y(0) = y(T) = 0$$

и с условием склейки решений в окрестности особой точки, задаваемым матрицей перехода $A = [a_{jk}]_{j,k=1,2}$ (см. ниже).

Пусть $s_j(x,\lambda)$, $j = 1,2$, $x \in [0,a) \cup (a,T]$ – решения уравнения (1) при условии $s_j(x,\lambda) = O((x-a)^{\mu_j})$, $x \to a$, $\mu_j = (-1)^j \nu + 1/2$ (см. [1]). Пусть задана матрица $A = [a_{jk}]_{j,k=1,2}$, $\det A \neq 0$, $a_{12} = 0$. Обозначим

$$\sigma_j(x,\lambda) = \begin{cases} s_j(x,\lambda), & x < a, \\ \sum_{k=1}^{2} a_{kj} s_k(x,\lambda), & x > a. \end{cases}$$

Фундаментальная система решений $\{\sigma_j(x,\lambda)\}_{j=1,2}$ используется для склейки решений уравнения (1) в окрестности особой точки. Предположим, что

$$a_{11} \exp(2\pi i \nu) - a_{22} \neq 0. \tag{2}$$

Условие (2) будем называть условием регулярности склейки. Пусть $\lambda = \rho^2$, $\xi_k = a_{11} \exp(k\pi i \nu) - a_{22} \exp(-k\pi i \nu)$,

$$\varphi_j(x,\lambda) = (-1)^{j-1} \left(\sigma_2^{(2-j)}(0,\lambda)\sigma_1(x,\lambda) - \sigma_1^{(2-j)}(0,\lambda)\sigma_2(x,\lambda) \right), \quad j = 1,2,$$

$$\Delta(\lambda) = \varphi_2(T,\lambda).$$

ТЕОРЕМА 1. (1) Нули $\{\lambda_n\}$ целой функции $\Delta(\lambda)$ совпадают с собственными значениями краевой задачи l.

(2) При $|\rho| \to \infty$

$$\Delta(\lambda) = (4i\rho \sin \pi\nu)^{-1} \big(i\xi_1 \exp(-i\rho T)[1] - i\xi_1 \exp(i\rho T)[1]$$
$$+ \xi_2 \exp(i\rho(T-2a)) + \xi_0 \exp(-i\rho(T-2a)) \big), \quad [1] := 1 + O(\rho^{-1}).$$

(3) Существует $h > 0$ такое, что все собственные значения $\lambda_n = \rho_n^2$ задачи l лежат в полосе $|\operatorname{Im}\rho| < h$.

(4) Число N_ξ собственных значений в прямоугольнике $\Pi_\xi := \{\rho : |\operatorname{Im}\rho| < h, \operatorname{Re}\rho \in [\xi, \xi+1]\}$ ограничено по ξ.

(5) Обозначим $G_\delta = \{\rho : |\rho - \rho_n| \geq \delta$ при всех $n\}$. Тогда

$$|\Delta(\lambda)| \geq C_\delta |\rho|^{-1} \exp(|\operatorname{Im}\rho| T), \quad \rho \in G_\delta.$$

2. Пусть $B_{\alpha,p} = \{f(x) : f(x)(x-a)^{-\alpha} \in L_p(0,T)\}$ – банахово пространство с нормой $\|f\|_{\alpha,p} = \|f(x)(x-a)^{-\alpha}\|_{L_p(0,T)}$. Положим $\omega = -\operatorname{Re}\nu + 1/2$.

ТЕОРЕМА 2. Система собственных и присоединенных функций краевой задачи l полна в $B_{\alpha,p}$ при $1 \leq p < \infty$, $\alpha < \omega + 1/p$.

Замечание. Приведем контрпример, показывающий существенность условия регулярности склейки (2). Рассмотрим задачу l при

$$\nu_0 = 0, \quad q(x) \equiv 0, \quad T = \pi, \quad a = 3\pi/4, \quad a_{11} = -a_{22} = 1, \quad a_{21} = a_{12} = 0,$$

т.е. краевую задачу

$$\left.\begin{aligned} &-y'' = \lambda y, \quad 0 < x < \pi, \\ &y(0) = y(\pi) = 0, \quad y^{(m)}(a+0) = (-1)^m y^{(m)}(a-0), m = 0,1, a = 3\pi/4. \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Для этой задачи условие (2) не выполняется, и

$$\Delta(\lambda) = \rho^{-1} \sin\rho(2a - T).$$

Собственные значения $\lambda_n = \rho_n^2$ задачи (3) суть $\rho_n = 2n, n \ge 1$, а собственные функции имеют вид

$$y_n(x) = \begin{cases} \sin 2nx & x \le 3\pi/4, \\ (-1)^{n-1} \sin 2nx, & x > 3\pi/4. \end{cases}$$

Система функций $\{y_n(x)\}_{n\ge1}$ неполна в $B_{\alpha,p}$ при $1 \le p < \infty, \alpha < 1 + 1/p$.

3. Рассмотрим обратную задачу. Обозначим $\delta(\lambda) = \varphi_1(T, \lambda)$. Функцию $M(\lambda) = -\delta(\lambda)/\Delta(\lambda)$ будем называть функцией Вейля задачи l.

ТЕОРЕМА 3. Задание функции Вейля $M(\lambda)$ однозначно определяет краевую задачу l.

В случае простого спектра рассмотрим множество $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n\ge1}$ ($\alpha_n := \operatorname{Res}_{\lambda=\lambda_n} M(\lambda)$), которое называется спектральными данными задачи l.

ТЕОРЕМА 4. Задание спектральных данных однозначно определяет краевую задачу l.

Метод доказательства теорем 3, 4 является конструктивным и даёт процедуру решения обратной задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Yurko V. A.* Inverse problems for differential equations with singularities lying inside the interval // J. of Inverse and Ill-Posed Problems. 2000. Vol. 8. №.1. P. 89 – 103.