УДК 518:517.944

Н. Ю. Агафонова

РАСЧЁТ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОЛЕЙ В СОСТАВНЫХ ТЕЛАХ ВРАЩЕНИЯ

Рассмотрим в цилиндрической системе координат x, R, φ тело вращения Q, состоящее из M подобластей, которые образуются вращением вокруг оси x плоской области $D=\bigcup_{i=1}^{M} D_i$. Пусть границу Γ области D можно разбить на гладкие участки $L_1,\ldots,L_N$ таким образом, что $\Gamma=\bigcup_{i=1}^{N} L_i$. Воспользуемся P-формой задания областей [1]. Введем параметр σ, такой, что $d_i \le \sigma \le d_{i+1}$ на участке L_i, $0 \le i \le N-1$. В этом случае граница Γ области D однозначно отобразится на отрезок $[d_0, d_N]$ числовой оси σ. При этом $x = x_i(\sigma)$, $R = R_i(\sigma)$; $d_i \le \sigma \le d_{i+1}$, $i=\overline{0,N-1}$. Пусть каждая из подобластей тела характеризуется своим постоянным коэффициентом теплопроводности λ_i. Стационарное температурное поле в каждой из подобластей описывается уравнением Лапласа, которое в цилиндрической системе координат имеет вид

$$\Delta T_i = \frac{\partial^2 T_i}{\partial x^2} + \frac{1}{R}\frac{\partial T_i}{\partial R} + \frac{\partial^2 T_i}{\partial R^2} + \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 T_i}{\partial R^2} = 0, \qquad i=\overline{1,M}. \tag{1}$$

Будем полагать, что на внешних границах тела задано одно из условий I, II или III рода, которые в обобщенном виде можно записать так:

$$\omega(x,R)\lambda_i \frac{\partial T_i}{\partial n_{i0}} + \alpha(x,R)T_i = f(x,R,\varphi). \tag{2}$$

Здесь $\alpha(x,R), f(x,R,\varphi)$ – известные функции, $\omega(x,R)$ – известная кусочно-постоянная функция, определяющая тип граничных условий. Если $\omega=0$ и $\alpha=1$, то имеем граничные условия I рода; если $\omega=1$ и $\alpha=0$, то имеем граничные условия II рода; и при $\omega=1$ и $\alpha>0$ имеем граничные условия III рода. Функции ω и α не зависят от переменной φ.

На внутренних границах между подобластями тела заданы условия идеального теплового контакта

$$\lambda_i \frac{\partial T_i}{\partial n_{ij}} = \lambda_j \frac{\partial T_j}{\partial n_{ij}}, \qquad T_i = T_j. \tag{3}$$

Решим поставленную таким образом задачу теплопроводности.

Представим искомую функцию рядом Фурье

$$T(x,R,\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k^c(x,R)\cos k\varphi + T_k^s(x,R)\sin k\varphi, \tag{4}$$

где коэффициенты $T_k^c(x,R)$ и $T_k^s(x,R)$ – неизвестные функции указанных аргументов. Функция $f(x,R,\varphi)$ представляется аналогичным рядом с коэффициентами $f_k^c(x,R), f_k^s(x,R)$ соответственно.

В работе [2] было доказано, что с использованием условий идеального теплового контакта решение уравнения (1) может быть представлено в виде интегрального уравнения, которое с использованием представления функций рядами Фурье для поставленной задачи преобразуется к виду

$$\begin{gathered}
\sum_{i=0}^{M} \lambda_i p_i(\sigma_0)\omega(\sigma_0)\Phi_k(\sigma_0) + \int_{d_0}^{d_N}[(\alpha\Lambda_k - \omega(\lambda_i - \lambda_j)\Psi_k)\Phi_k R(\sigma)\chi(\sigma)d\sigma = \\
= \sum_{i=1}^{M} \lambda_i p_i(\sigma_0)(\omega(\sigma_0) - 1)f_{ck}(\sigma_0) + \\
+ \int_{d_0}^{d_n}(\omega\Lambda_k + (1-\omega)\lambda_i\Psi_k)]f_{ck}(\sigma)R(\sigma)\chi(\sigma)d\sigma,
\end{gathered} \tag{5}$$

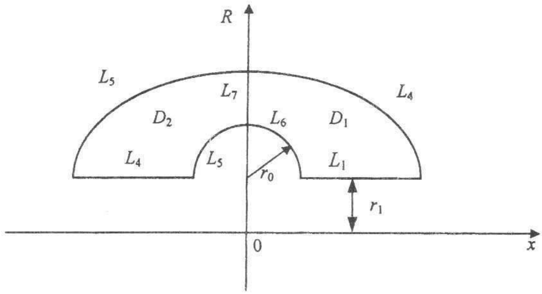
где (x_0, y_0, z_0) – точка на границе области, $\Psi_k(\sigma)$, Λ_k – известные функции, получающиеся с использованием разложения (4), а $\Phi_k = -\lambda_i \dfrac{\partial T_k^c}{\partial n_{i0}}$, если $\omega = 0$; $\Phi_k = T_k^c$, если $\omega = 1$. Для функций T_k^s имеем аналогичное уравнение.

Уравнения (5) решаются численно путем сведения интегральных уравнений к СЛАУ. Для этого на каждом из участков искомая функция представляется интерполяционным многочленом Лагранжа с тремя равноотстоящими узлами. В результате решения этой системы получаются значения искомой функции в узловых точках. Решение в других точках может быть получено путем интерполяции.

В качестве примера приведём решение краевой задачи (1) – (3) в области (см. рисунок), границы которой состоят из отрезков прямых и дуг. На участках L_1, L_6 поставлены условия II рода, на L_2, L_5 – III рода, L_3, L_5 – I рода.

Краевое условие (2) определялось функцией $f(x,R,\varphi)=100+10(\varphi-\pi)^2$.

Количество членов ряда (4) определялось из условия $\max T_k \le \varepsilon, \varepsilon=10^{-3}$. Результаты расчетов $T(\sigma,\varphi)$ представлены в таблице.



Температура на участке L_1

Точки разбиения	$\varphi=0$	$\varphi=\pi/4$	$\varphi=\pi/2$
σ_1	184,2541	159,2003	128,3908
σ_2	184,0471	159,3812	128,6763
σ_3	184,2074	160,183	129,6435
σ_4	184,9413	161,801	131,4645
σ_5	186,6429	164,5401	134,3919
σ_6	189,9596	168,8682	138,7773
σ_7	195,8631	175,4501	145,062
σ_8	205,709	185,1309	153,7141
σ_9	218,6123	196,5503	163,249

Таким образом, описанный метод позволяет определить тепловое поле в составном теле вращения. При этом необходимо решить несколько параллельных плоских задач, а затем по (4) получить решение в трёхмерной области. Выбирая шаг по φ, можно полностью определить тепловое поле на поверхности тела и внутри него.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Федик И. И., Колесов В. С., Михайлов В. Н.* Температурные поля и термонапряжения в ядерных реакторах. М.: Энергоатомиздат, 1985.

2. *Агафонова Н. Ю., Михайлов В. Н.* Интегральные представления решения уравнения Лапласа в составных трехмерных областях // Математика, механика, математическая кибернетика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1999. С. 7 – 9.