

НЕОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ОРТОТРОПНЫХ ТОНКОСТЕННЫХ ЦИЛИНДРОВ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

Колебания систем с переменными характеристиками представляют большую и сложную проблему. Поведение таких систем зависит от величин частот собственных колебаний. Теоретические основы их расчёта разработаны [1 – 5] и сводятся к отысканию собственных значений дифференциальных уравнений. Математические модели, основанные на классической теории оболочек, не позволяют получить аналитических зависимостей для расчёта собственных частот.

Для неосесимметричных оболочечных колебаний, как наиболее вероятных по сравнению с осесимметричными и изгибными балочными колебаниями, предлагаются упрощенные математические модели, позволяющие вычислять собственные частоты рассматриваемых систем.

Рассмотрим колебания тонкой цилиндрической оболочки из анизотропного материала с переменной толщиной $\delta(x)$ вдоль оси оболочки x . Используем энергетический метод в форме, представленной в работах [6, 3]. Сделаем следующие допущения: справедливы закон Гука, гипотезы Кирхгофа-Лява и гипотезы отсутствия сдвигов в срединной поверхности и нерастяжимости в окружном направлении; диссипации энергии нет.

Энергию оболочки представим в виде

$$U = \int_0^l \Gamma dx, \quad \Gamma = \frac{1}{2} \int [m_\varphi \dot{\chi}_\varphi + \sigma_x \delta_x \varepsilon_x + \rho \delta (\dot{w}w + \dot{v}v + \dot{u}u)] R d\varphi. \quad (1)$$

В (1) потенциальная энергия деформации представлена энергией изгиба и деформаций поперечных сечений, работа внешних сил – силами инерции на радиальных w , окружных v , и продольных u перемещениях. Точками обозначены производные по времени t . Штрихами будем обозначать производные по осевой координате x .

Зададим радиальные перемещения m -го тона колебаний в виде

$$w(x, \varphi, t) = \sum_{n=2}^{\infty} \psi_n(x) \cos n\varphi \cdot \sin \omega t, \quad (2)$$

где ω – частота собственных колебаний. Все усилия и перемещения выразим через радиальные перемещения w [6]. В результате из (1) получим следующее выражение:

$$\Gamma = \frac{1}{2} \sum_n \left\{ \frac{\hat{E}_\varphi}{R^4} (n^2 - 1)^2 \delta^3(x) \psi_n^2(x) + \frac{E_x R^2}{n^4} \delta(x) [\psi_n''(x)]^2 - \omega^2 \rho \delta(x) \times \right. \\ \left. \times \left[\psi_n^2(x) \frac{n^2 + 1}{n^2} + \frac{R^2}{n^4} [\psi_n'(x)]^2 \right] \right\} \pi R \cos^2 \omega t, \quad (3)$$

$$\hat{E}_\varphi = \frac{E_\varphi}{12(1 - \mu_x \mu_\varphi)}.$$

Из уравнения Эйлера-Лагранжа вариационной задачи на одном периоде колебания

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial \psi_n(x)} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \psi_n'(x)} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \psi_n''(x)} \right) = 0$$

с учетом (3) получим дифференциальные уравнения задачи

$$\psi_n^{IV}(x) + 2 \frac{\delta'(x)}{\delta(x)} \psi_n'''(x) + \left(\frac{\delta''(x)}{\delta(x)} + \frac{\omega_n^2 \rho}{E_x} \right) \psi_n''(x) + \frac{\delta'(x)}{\delta(x)} \cdot \frac{\omega_n^2 \rho}{E_x} \psi_n'(x) + \\ + \left(\frac{n^4 (n^2 - 1)^2 \hat{E}_\varphi \delta^3(x)}{E_x R^6 \delta(x)} - \omega_n^2 \frac{n^2 (n^2 + 1) \rho}{E_x R^2} \right) \psi_n(x) = 0. \quad (4)$$

Из этой математической модели собственных колебаний как частные случаи следуют известные уравнения для ортотропных и изотропных оболочек с постоянной толщиной [2, 3, 5, 6].

Для расчёта собственных частот предлагаем модель задачи, вытекающую из закона сохранения механической энергии за один период, что соответствует ситуации $\Gamma_n=0$ в (1)

$$\omega_n^2 = \frac{\int_0^l \frac{\hat{E}_\varphi(x)}{R^4} (n^2 - 1)^2 \delta^3(x) \psi_n^2(x) dx + \int_0^l \frac{E_x R^2}{n^4} \delta(x) [\psi_n''(x)]^2 dx}{\int_0^l \rho \cdot \left[\delta(x) \psi_n^2(x) \left(1 + \frac{1}{n^2} \right) + \frac{R^2}{n^4} \delta(x) [\psi_n'(x)]^2 \right] dx}. \quad (5)$$

В качестве функций $\psi_n(x)$ можно использовать фундаментальные балочные функции [2], соответствующие граничным условиям.

Для ситуации

$$\delta(x) = \delta \cdot e^{cx} \quad (6)$$

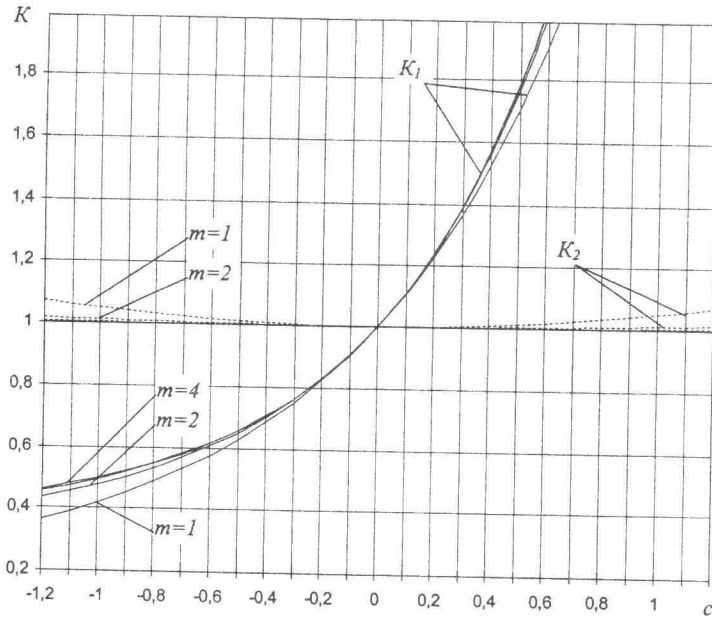
из формулы (5) получим

$$\omega_n^2 = \frac{E}{\rho R^2} \left(\frac{\left(\alpha \frac{R}{l} \right)^4 + \frac{n^4 (n^2 - 1)^2}{12(1 - \mu^2)} \left(\frac{\delta}{R} \right)^2 \cdot K_1}{\left(\alpha \frac{R}{l} \right)^2 \cdot K_2 + n^2 (n^2 + 1)} \right), \quad (7)$$

$$K_1 = (e^{2c} + e^c + 1) \cdot \frac{c^2 + 4a^2}{3(9c^2 + 4a^2)}, \quad K_2 = 1 + \frac{c^2}{2a^2},$$

где α – параметр, учитывающий граничные условия и номер тона колебаний [6]. Для шарнирного опирания краев оболочки $\alpha = m\pi$ ($m=1, 2, \dots$).

Зависимость коэффициентов неоднородности K_1 и K_2 от показателя изменения толщины c приведена на рисунке.



Расчёты минимальных собственных частот для гладких изотропных оболочек в ситуации (6) при шарнирном опирании краёв методом вариации произвольных постоянных при трёх приближениях по первой и второй модели практически совпадают. Объём расчётов по первой модели во много раз превышает объём вычислений по второй модели.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бабаков И. М. Теория колебаний. М.: Наука, 1965.
2. Власов В. З. Избранные труды: В 3 т. Т.1. М.: Изд. АН СССР, 1962.

3. Кан С. Н. Строительная механика оболочек. М.: Машиностроение, 1966.
4. Крысько В. А., Куцмако А. Н. Устойчивость и колебания неоднородных оболочек. Саратов, 1999.
5. Флюгге В. Статика и динамика оболочек. М.: Госстройиздат, 1961.
6. Антоненко Э. В. Частоты свободных колебаний гладких и подкрепленных цилиндрических оболочек с упруго закрепленными краями // Прикладная механика. 1989. Т. 25. № 8. С. 122 – 126.

УДК 539.3

В. Л. Березин, Ю. П. Гуляев

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОНТАКТНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В НЕОДНОРОДНОЙ УПРУГОЙ СРЕДЕ С ЛОКАЛЬНЫМИ ЖЁСТКИМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ

Контактные задачи в упругих средах с локальными тонкостенными включениями относятся к классу наиболее сложных задач теории упругости. Основные математические подходы к решению подобных задач изложены в монографии [1].

В данной статье предлагается простой подход к решению сложной контактной задачи взаимодействия неоднородного упругого массива с абсолютно жесткими элементами, находящимися как на поверхности массива, так и внутри него. На практике такая задача возникает при изучении напряженно деформированного состояния (НДС) в рулоне сена при перемещении его с помощью захватного механизма погрузчика.

Сформулируем эту задачу. Имеется рулон сена длиной L_r , радиуса R_r со средним удельным весом γ_r , который поставлен на торец. В него внедрены зубья захватного механизма в торец и в боковую поверхность (см. рисунок). При подъеме рулона манипулятором погрузчика на поверхности контакта рулона с зубьями и несущими элементами захватного механизма возникают напряжения под действием веса рулона.

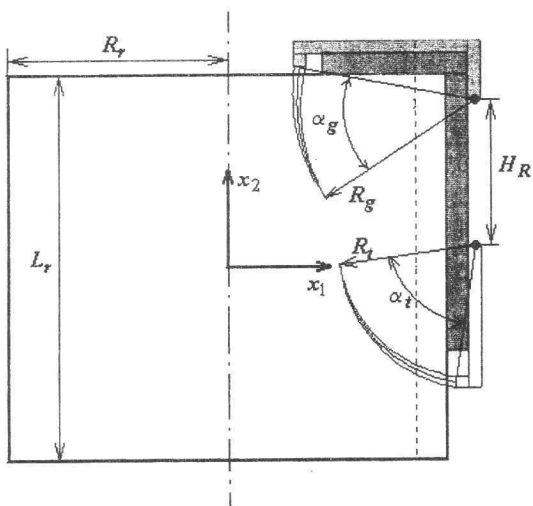


Схема захвата рулона